República de Angola

________*________

INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO DA HUÍLA

ISCED-HUÍLA

PROPOSTA DE UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA O CÁLCULO DA RAIZ QUADRADA NA 9ª CLASSE. UM ESTUDO NO COMPLEXO ESCOLAR 116 “IMACULADA CONCEIÇÃO” – LUBANGO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS OPÇÃO MATEMÁTICA

Autor: LUCIANO KAMUELE KALIANGUILA

Lubango, 2023

INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO DA HUÍLA

ISCED-HUÍLA

PROPOSTA DE UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA O CÁLCULO DA RAIZ QUADRADA NA 9ª CLASSE. UM ESTUDO NO COMPLEXO ESCOLAR 116 “IMACULADA CONCEIÇÃO” – LUBANGO

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS OPÇÃO MATEMÁTICA

Autor: LUCIANO KAMUELE KALIANGUILA

Orientador: Professor Doutor Bernardo Filipe Matias

Lubango, 2023

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela sua infinita misericórdia.

Aos meus pais, Albano Bingumbingo e Victorina Calumbo Salongo, pois foram os meus primeiros educadores, e ensinaram-me (e ensinam-me até hoje) lições de vida, trabalhando intensamente e sacrificando muitos dos seus sonhos a favor dos meus.

Aos meus irmãos, amigos e colegas, que sempre me apoiaram e nunca desistiram em dar-me forças nesta jornada.

Aos professores do Mestrado em Ensino das Ciências.

Aos professores do Departamento de Ciências Exactas do ISCED-Huíla.

Um especial agradecimento ao meu orientador, Professor Doutor Bernardo Filipe Matias, pelo incansável e firme acompanhamento exemplar que me proporcionou ao longo da elaboração desta obra.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho, de modo especial, aos meus pais, Albano Bingumbingo e Victorina Calumbo Salongo, e aos meus irmãos, João Bingumbingo, Josefa Eyola Kalianguila, José Bingumbingo, António Bingumbingo, Luciano Bingumbingo, Albanilda Bingumbingo, Maria Bingumbingo e Henriques Bingumbingo, pelo apoio incondicional dado.

RESUMO

O objectivo deste trabalho é propor uma alternativa metodológica para o cálculo da raiz quadrada, usando o método de Jonofon Sérates, no Complexo Escolar 116 "Imaculada Conceição", a fim de auxiliar as estratégias de resolução e proporcinar opções alternativas aos alunos diante da necessidade do cálculo da raiz quadrada. Este trabalho apresenta um enfoque predominantimente qualitaitivo, de caracter descritivo . Nele, analisou-se o estado actual do ensino do cálculo da raiz quadrada, sendo que, com a aplicação de diferentes instrumentos de investigação (dentre os quais, destacam-se a obsrvação e inquérito), os resultados comprovaram que há muitas dificuldades no processo de ensino da Matemática, no que que se refere ao cálculo da raiz quadrada, condicionando assim, a boa aprendizagem por parte dos alunos. Como solução para o problema identificado, elaborou-se uma proposta metodológica para o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe, no contexto do tema " Aprofundamento do Estudo dos Números e Operações". Por fim, foi submetido a proposta metodológica aos especialistas para ser validada.

Palavras-chave: proposta, alternativa, metodologia, raiz quadrada;

Abstract

The objective of this work is to propose a methodological alternative for calculating the square root, using the method of Jonofon Sérates, at Complexo Escolar 116 “Imaculada Conceição”, in order to support resolution strategies and provide alternative options to students when faced with the need of calculating the square root. This work presents a study with a predominantly qualitative focus, of a descriptive nature. In it, the current state of teaching square root calculation was analyzed, and with the application of different research instruments (among which observation and survey stand out), the results proved that there are many difficulties in process of teaching Mathematics, with regard to the calculation of the square root, thus conditioning good learning on the part of students. As a solution to the identified problem, a methodological proposal was developed for calculating the square root in the 9th class, in the context of the theme “Deepening the Study of Numbers and Operations”. Finally, the methodological proposal was submitted to experts for validation.

Keywords: proposal, alternative, methodology, square root;

ÍNDICE

LISTAS DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTAS DE GRÁFICOS

LISTA DE ABREVIATURAS

A.N.P	Asseguramento do Nível de Partida
O.A.O	Orientação até ao Objectivo
T.N.M	Tratamento da Nova Matéria
ZIP	Zona de Influência Pedagógica

CAPITULO 0: INTRODUÇÃO

0.1. Introdução

O processo de ensino-aprendizagem agrega a complexidade que envolve o ensinar e o aprender, lidando com as particularidades dos contextos educacionais, nos quais se vivenciam as acções pedagógicas. É fundamental desenvolver-se acções pedagógicas que levam à compreensão e ao entendimento dos alunos nos mais variados conteúdos ministrados.

Para tal, o professor deve ser um maestro e conduzir a orquestra do processo de ensino, procurando novos métodos e formas mais acessíveis que levam o aluno a mergulhar nas profundezas da compreensão, satisfação e entendimento, e não apenas focalizar o aluno num único ângulo.

Vale (2013) citado por Gabriel (2022), afirma que:

> Por mais antigo, tradicional e repisado que seja o assunto que estamos a ensinar, é fundamental sempre procurar novos ângulos para focalizá-lo, outras maneiras de abordá-lo, não somente buscando tornar mais atraente nossas aulas, mas até mesmo para nos dar um pouco mais de entusiasmo, quebrando a monotonia de repetir todos os anos a mesma história. (p.2)

Neste sentido, concordamos com a perspectiva de que o ensino não se deve limitar apenas na mesmice, mas sim em metodologias contínuas que proporcionem ao professor um novo panorama acerca da aprendizagem e das dificuldades dos alunos. Por isso, como aponta Silva (2011) citado por Santos et al. (2020), não importa apenas ensinar, urge saber se as formas de ensino atendam às diferentes formas de aprendizagem.

Um dos assuntos observados e que merece maior destaque por ser explorado com poucas possibilidades de resolução no I Ciclo do Ensino Secundário é o estudo da raiz quadrada. É um assunto muito interessante, tendo em conta a sua vasta gama de aplicação na álgebra, na trigonometria e em muitas áreas do conhecimneto.

Há pouca exploração dos métodos, procedimentos e estratégias de resolução do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe, e isto tem causado fortes debilidades aos alunos, levando-os a encarar o cálculo da raiz quadrada como algo de difícil compreensão. Por cada aluno apresentar uma particularidade individual em sala de aula, o professor deve pautar-se por explorar o máximo possível um determinado conteúdo, isto é, servir-se de técnicas e estratégias inovadoras, de modo a levar os alunos à percepção do conteúdo, tendo em atenção os modos de funcionamento cognitivo dos alunos, para minimizar os problemas em sala de aula.

Matos (1990) citado por Musholovela (2009), refere que as dificuldades dos alunos são, em geral, atribuídas não somente à complexidade conceptual da Matemática, mas sim à sua aparente rigidez e a incapacidade dos professores de apresentá-la de forma coerente e significativa.

Como se pode notar, o professor ocupa um lugar importante no processo de ensino-aprendizagem, por isso, é fundamental que este seja um artista, procurando incansavelmente por formas mais simples e eficazes que levam os alunos à compreensão.

O cálculo da raiz quadrada é um assunto abordado, inicialmente, na 9ª classe, mas este assunto tem deixado muito a desejar, pois é abordado fazendo-se recurso aos métodos de tentativas e erros, das bissecções, tradicional e de factorização. Refira-se que o método tradicional, apesar de ser bom para o cálculo de raízes exactas e não exactas, tem originado grandes dificuldades aos alunos, pois se centra num algoritmo difícil de ser percebido e fácil de ser esquecido pelos alunos, tendo em conta a sua complexidade. Além disso, outra grande desvantagem deste método centra-se no factor tempo (por exemplo, numa prova) ao determinar a raiz quadrada. O método de tentativas e erros limita-se ao facto de muitos alunos da 9ª classe não saberem fazer aproximações, principalmente quando se trata de raízes não exactas. Ao passo que o método de factorização mesmo sendo fácil e prático para os alunos, apresenta limitações, por centrar-se apenas no cálculo de raízes exactas. Por fim, o método das bisseções, apesar de bom para fazer aproximações de qualquer raiz quadrada, é muito lento, uma vez que os alunos apresentam grandes dificuldades na divisão de números decimais.

Como sabemos, toda investigação tem como foco principal a solução de um problema identificado. Pode-se afirmar que a selecção deste tema deve-se ao facto de os alunos apresentarem fortes problemas em relação ao cálculo da raiz quadrada, observando as poucas explorações das distintas vias de resolução.

Porém, a exploração deste tema servirá para auxiliar os professores e os alunos e facilitar a abordagem dos mais variados conteúdos evolvendo o cálculo da raiz quadrada. Concretamente, referimo-nos, por exemplo, a demonstrações de teoremas, resoluções de equações quadráticas, cálculo de distância entre dois pontos e determinação do lado de um quadrado conhecendo-se sua área.

Diante das reflexões acima postas, e com intuito de subsidiar alunos e professores de Matemática do I Ciclo do Ensino Secundário, houve a necessidade de desenvolver o trabalho de investigação com o tema: **Proposta de uma Alternativa Metodológica para o Cálculo da Raiz Quadrada na 9ª Classe. Um estudo no Complexo Escolar 116 "Imaculada Conceição" – Lubango.**

0.2. Problema de Investigação

Toda investigação começa com algum tipo de problema. Todavia, a conceptualização adequada de problema de investigação não é tarefa fácil, em virtude das diferentes acepções que envolvem esse termo.

Segundo Morais (2010), problema de investigação é qualquer questão para a qual não se conhece a resposta e se procura, pelo menos, uma solução em qualquer domínio de conhecimento.

Para a presente pesquisa, tem-se o seguinte problema de investigação: "Como contribuir para favorecer o processo de ensino-aprendizagem no tratamento do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe no Complexo Escolar 116 "Imaculada Conceição" – Lubango?".

A direcção desta investigação para solucionar o problema científico levantado foi guiada pelas seguintes questões científicas:

- Quais são os antecedentes teóricos-metodológicos do processo de ensino-aprendizagem do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe?

- Qual é o estado actual do processo de ensino-aprendizagem do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe?
- Qual é a estrutura que deve ter uma proposta teórico-metodológica para o ensino do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe?

0.2.1. Ideia a defender

Defende-se a ideia de que há necessidade de se elaborar a proposta de uma alternativa metodológica para o tratamento do cálculo da raiz quadrada.

0.2.2. Justificação da investigação e escolha do tema

Como se referiu na Introdução, o processo de ensino-aprendizagem da Matemática deve levar o docente à exploração das diferentes alternativas que permitem a compressão e a satisfação de todos alunos, contribuindo, assim, para o sucesso e o alcance dos objectivos do ensino.

O cálculo da raiz quadrada é um assunto cujo tratamento não se esgota somente no I Ciclo do Ensino Secundário, mas sim uma abordagem com o seu início neste ciclo e decurso até outros ciclos.

O interesse da investigação surge de observações em aulas e da interacção com professores do I Ciclo do Ensino Secundário, na busca de métodos simples, práticos, eficazes e motivadores para o cálculo da raiz quadrada, pois os métodos anteriores chegam a ser exaustivos. A par disto, fomos motivados, também, pelas dificuldades apresentadas pelos alunos, de acordo com o cálculo da mesma. Por isso, torna-se conveniente uma investigação que visa propor uma nova abordagem no tratamento deste tema.

Por outro lado, uma vez realizado o estudo, este pode servir de orientação metodológica para os professores, bem como funcionar como instrumento de apoio para a planificação das suas aulas, quando estiverem a abordar o cálculo em IR.

Neste limiar de ideais, faz-se fundamental elaborar a proposta de uma alternativa metodológica para o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe no Complexo Escolar 116 “Imaculada Conceição” – Lubango.

0.2.3. Delimitação do campo de investigação

A investigação foi delimitada aos alunos da 9ª classe, com uma amostra seleccionada aleatoriamente.

0.2.4. Objecto de investigação

Paralelamente ao problema de investigação, o objecto desta investigação é o processo de ensino-aprendizagem da Matemática na 9ª classe.

0.2.5. Objectivo de investigação

Elaborar uma proposta metodológica alternativa para o tratamento do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe no complexo escolar 116 "Imaculada Conceição" Lubango.

0.2.6. Campo de acção

A presente investigação teve como campo de acção o processo de ensino aprendizagem do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe, no Complexo Escolar 116 "Imaculada Conceição" – Lubango.

0.2.7. Tipo de investigação

Tendo em conta o objectivo traçado, utilizou-se uma investigação do tipo descritiva.

"Investigação descritiva é aquela em que o pesquisador regista ou descreve os factos observados sem inferir neles; visa descrever as características de determinada população, fenómeno ou estabelecimento de relações entre variáveis; envolve técnicas padronizadas de colecta de dados (questionários e observações sistematizadas) " (Prodonov, 2013, p.52).

Tal pesquisa, observa, regista, analisa e ordena os dados sem manipulá-los, isto é, sem interferência do pesquisador. Procura descobrir a frequência com que um facto ocorre, a sua natureza, as suas características, as causas e as relações com outros factos.

Assim, para colectar tais dados, utiliza-se técnicas específicas, entre as quais destacam-se: inquéritos, testes, entrevistas e observações.

A diferença entre a pesquisa experimental e a pesquisa descritiva é que esta procura classificar e interpretar factos que ocorrem, enquanto aquela pretende demonstrar o modo ou as causas pelas quais um facto é produzido.

Portanto, o presente trabalho teve um desenho descritivo, pelo facto de não ser experimental.

0.2.8. Tarefas de investigação

Para o alcance dos objectivos preconizados, realizou-se as seguintes tarefas de investigação:

- Destacar os antecedentes teórico-metodológicos do processo de ensino-aprendizagem do cálculo da raiz quadrada;
- Diagnosticar os factores que estão na base do mau aproveitamento dos conteúdos relacionados ao cálculo da raiz quadrada;
- Efectuar uma análise bibliográfica referente ao tema de investigação;
- Elaborar uma proposta metodológica para o tratamento do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe;
- Validar a proposta.

Este trabalho sugere uma proposta que parte de conceitos gerais, em que se pretende apresentar uma estratégia, para saber e compreender o cálculo da raiz quadrada. Por outro lado, tem como finalidade contribuir para a formação inicial ou continuada do professor da 9ª classe, levando-o a reflectir sobre a sua metodologia no ensino da Matemática.

Por esta razão, propõe-se um tratamento metodológico do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe, de modo a contribuir para minimizar as dificuldades no ensino e na aprendizagem do conteúdo em estudo.

0.3. Desenho Metodológico

0.3.1. População

A população foi constituída por 209 alunos matriculados na 9ª classe e 2 professores de Matemática do Complexo Escolar 116 “Imaculada Conceição“ – Lubango.

0.3.2. Amostra

Os autores Grisi & Borba (n.d) apresentam vários critérios de selecção da amostra. Para este trabalho, teve-se em conta uma amostra aleatória simples, em que todos os elementos da população têm a mesma probabilidade de serem seleccionados.

Para a amostra ser significativa, recorreu-se à calculadora online *SurveyMonkey* (n.d), de que, com um nível de confiança de 95% e uma margem de erro de 5%, se encontrou uma amostra de 136 alunos da 9ª classe e 2 professores.

0.4. Métodos de Investigação

Tendo em vista o cumprimento das tarefas definidas, os métodos utilizados foram:

0.4.1. Métodos teóricos

- **Histórico-lógico**: utilizado para compreender a evolução do tratamento do cálculo da raiz quadrada.
- **Indutivo-dedutivo**: utilizado para interpretação dos dados partindo do particular para o geral ou universal.
- **Analítico-sintético**: utilizado para analisar todo o trabalho de investigação depois de redigido; foi usado em diferentes momentos do processo de investigação (na análise e síntese da informação da bibliografia estudada, na realização do diagnóstico e na elaboração das conclusões e recomendações).

0.4.2. Métodos empíricos

- **Análise documental**: utilizado na revisão de todos os documentos relacionados com a temática em causa;
- **Inquéritos:** utilizados para conhecer a opinião dos alunos e dos professores acerca das dificuldades e da utilização de uma proposta metodológica no tratamento do cálculo da raiz quadrada no Complexo Escolar nº 116 “Imaculada Conceição” – Lubango.
- **Testes**: utilizados para diagnosticar as habilidades e debilidades dos alunos no cálculo da raiz quadrada.

- **Consulta a peritos**: para validação da proposta metodológica

0.4.3. Métodos estatísticos

Análise das frequências absolutas e relativas.

0.5. Antecedentes do Tema

Sendo a ciência dinâmica, esta pode sofrer recuos e avanços, pois alguns autores já esmiuçaram suas ideias concernente à temática, justificando, assim, a complexidade do conteúdo. Entre estes, podemos destacar algumas monografias e dissertações disponíveis no ISCED-Huíla:

- Eurico (1996), com o tema "Alternativa Metodológica para o tratamento das Potências dos Números Reais na 9ª Classe dos Institutos do Ensino de Educação", em que se destacou as propriedades de potência a^n com $(a \in IR, \mathrm{n} \in \mathrm{Q})$.
- Cambumba (2015), com o tema "Procedimentos para o Cálculo de Raízes Quadradas e Cúbicas sem Recurso à Máquina Calculadora: uma Alternativa Metodológica para o Processo de Ensino-aprendizagem do Tema 'Cálculo em IR' na 9ª classe do I Ciclo do Ensino Secundário no Colégio 'António Houaiss' – Lubango", em que se refere ao cálculo das raizes quadrada e cúbica usando o algoritmo tradicional.
- Satulo (2016), com o tema "Incentivos de Cálculos de Raízes Quadradas, pela Referência de Bakhshali, na 8ª Classe na Zona de Influência Pedagógica (ZIP-21) do I Ciclo do Ensino Secundário, Município de Moçâmedes", defendendo o incentivo do cálculo da raiz quadrada dos alunos pela refência de Bakhshali para o cálculo de raízes exactas e não exactas.
- Chicapa (2015), com o tema "Proposta de uma Metodologia para o Aperfeiçoamento de Habilidades no Cálculo com Radicais para Reduzir a um Índice Comum nos Alunos da 10ª Classe da Escola do II Ciclo do Ensino Secundário "Samuel Lussati", argumentando que os alunos apresentam dificuldades no cálculo com radicais, das quais aponta: pouca habilidade em aplicar as propriedades dos radicais, debilidades em resolver exercícios que envolvam cálculos de radicais, dificuldades em

reduzir radicais a um índice comum e dificuldades na racionalização de denominadores.

- Nolasco (2009), com o tema "Racionalização de uma Expressão de dois Termos $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$ com $n \geq 3$ e sua Aplicabilidade em Análise Matemática I".

Refira-se que os trabalhos acima mencionados apresentam grandes propostas e explorações metodológicas para o tratamento do cálculo da raiz quadrada, mas com procedimentos um pouco complexos para os alunos.

Portanto, o trabalho desenvolvido difere-se dos demais pelo facto de apresentar ao cálculo da raiz quadrada usando apenas as operações elementares da adição e da subtracção e tendo em conta o conhecimento dos números ímpares aprendidos pelos alunos na 7ª classe.

Assim, podemos perceber que este trabalho se apresenta como uma abordagem inovadora para os alunos e professores, uma vez que é na 9ª classe em que o aluno aprende conceitos básicos sobre a radiciação, pensa-se que a proposta alternativa facilitará o processo de ensino-aprendizagem no tratamento do cálculo em IR.

CAPÍTULO I: ENQUADRAMENTO TEÓRICO

1.0. Introdução

O estudo sobre o cálculo da raiz quadrada não é recente; no entanto, é actuante e com grande utilidade prática na actualidade, tanto é que este conteúdo consta no Programa de Matemática da 9ª Classe. Assim sendo, é preciso, sempre, procurar novos ângulos de focalizá-lo, outras maneiras de abordá-lo, não somente para tornar as aulas mais cativantes, como também para melhorar a aprendizagem.

Este capítulo faz menção a aspectos relevantes que dizem respeito ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática, pormenorizando os aspectos ligados às operações com radicais, em particular, o cálculo da raiz quadrada; apresenta, também, algumas reflexões sobre as teorias psicopedagógicas do processo de ensino-aprendizagem da matemática, algumas aplicações da raiz quadrada, a caracterização do processo de ensino-aprendizagem do cálculo da raiz quadrada e as características psicopedagógicas dos alunos da 9ª classe.

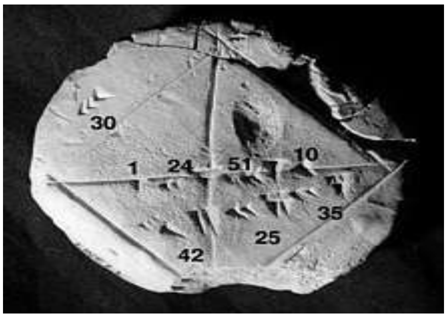
1.1. Resenha Histórica do Surgimento da Raiz Quadrada

Na Antiguidade, tem-se indícios de resolução de cálculos envolvendo a radiciação e potenciação. Em papiros egípcios, por exemplo, foram encontrados cálculos com potências para volumes de pirâmides, armazéns, entre outros, com o desenho de um par de pernas como símbolo para o quadrado de um número. Também existem evidências de cálculos semelhantes realizados na Babilónia, na Índia, na Grécia Antiga, na Roma Antiga e na Europa durante a Idade Média.

Os babilónios, além das quatro operações fundamentais, calculavam potências e raízes quadradas. Esses cálculos eram registados em tabletes de argila, e um dos exemplos mais conhecidos desses tabletes é o YBC 7289 de 1800 a 1600 a.C., em que aparece o cálculo ou uma regra para o cálculo da $\sqrt{2}$. (Carvalho, 2012, citado por Junior ,2018)

Figura 1

YBC 7289 da Universidade de Yale



Nesta figura, é mostrada uma aproximação para a $\sqrt{2}$, pois se tem um quadrado (em que o lado “s” [acima, à esquerda] tem 30 unidades de medida) e as suas diagonais desenhadas. Ao longo da diagonal, conforme o sistema numérico sexagesimal posicional babilónico (base 60), aparecem grafados os números $1, 24, 51, 10$ (acima) e $42, 25, 35$ (abaixo), que expressam o comprimento da diagonal do quadrado.

O número $1, 24, 51, 10$ representa a aproximação utilizada para o valor de $\sqrt{2}$. Então, ao multiplicar-se a medida do lado “s” de um quadrado qualquer por $1,24,51,10$ em base 60, obtemos a medida aproximada de sua diagonal “d”. Assim:

$$d = s.(1,24,51,10) = s.\left[1 + (24 \div 60) + \left(51 \div 60^2\right) + \left(10 \div 60^3\right)\right] \cong s.\left[1,414212963\right] \cong s.\sqrt{2}\ .$$

Na tablete de argila, o lado do quadrado mede 30; logo, $d = 30.(1,414212963) =$

$= 30.(1,414212963) = 42;25,35 = 42 + \left(25 \div 60\right) + \left(35 \div 60^2\right) \cong 42,42638889$, um valor aproximado para ($30.\sqrt{2} \cong 30.1,414213562 \cong 42,42640687$ (com erro menor que 10^{-4}).

Domingues (2009) citado por Júnior (2018), afirma que, quando os babilónios obtinham uma raiz quadrada que não era racional, o resultado era aproximado por alguma fracção ou um número natural, como o exemplo mostrado acima. Assim, criaram um método para aproximar $\sqrt{N}$, em que N era a área de um quadrado qualquer.

Em textos religiosos indianos escritos entre 800 e 600 a.C., os *sulbasutra*s, encontra-se um método ou regra para o cálculo de $\sqrt{2}$, que, em notação actual, traduz-se em:

$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{3.4.34}=\frac{1}{3.4.34}=\frac{577}{408}\cong 1{,}414215686\cong\sqrt{2}\cong 1{,}414213562$ (o erro é menor que 10^{-5}).

Os gregos questionavam a incomensurabilidade dos números irracionais e Hipaso de Metaponto (século V a.C.) foi quem, possivelmente, verificou que o lado e a diagonal de um quadrado não são mensuráveis; entretanto, não definiram o número irracional como se conhece (Domingues, 2009, citado por Júnior ,2018).

Aristóteles, por sua vez, expunha, com a técnica de raciocínio por absurdo, a prova da incomensurabilidade dos números irracionais (Roque & Carvalho, 2012).

Os romanos conquistaram um elevado nível de engenharia, com um conhecimento em álgebra e em aritmética evoluído; entretanto, nunca tiveram inclinação para a matemática abstracta; ao contrário, somente os aspectos práticos da matemática, ligados ao comércio e à engenharia civil, lhes interessavam (Eves ,2004).

Em Eves, pode-se observar que, na Europa medieval, o início do Renascimento ocorre no século XV, com a tomada de Constantinopla pelos turcos otomanos em 1453 e a queda do Império Bizantino; a Itália recebe muitos refugiados e, com eles, muito do conhecimento grego reaparece, e, com a invenção da imprensa, por Johann Gutenberg, na década de 1430, acelera-se a disseminação do conhecimento.

Nesta época, o matemático e astrónomo alemão Johann Muller (1436-1476), na sua obra *De Triangulis Omnimodis*, escrito por volta de 1464, publicada em 1533, composta de cinco livros, sendo os dois primeiros sobre trigonometria plana e os outros três sobre trigonometria esférica, apresentava cálculo de raízes de uma equação quadrática.

O mesmo autor afirma, ainda, que o frade franciscano e matemático italiano Luca Bartolomeo de Pacioli (1445-1509) teve a primeira edição de sua *suma de arithmetica, geométrica, proportioni et proportionalita* (colecção de conhecimentos de aritmética, geometria, proporção e proporcionalidade), ou apenas *suma*, em 1494, e o seu conteúdo de aritmética " começa com algoritmos para as quatro operações fundamentais e para a extracção da raiz quadrada".

1.1.1 Origem do símbolo da raiz quadrada

Alguns historiadores matemáticos apontam que o símbolo √ usado para representar uma raiz é bastante especulativo.

Segundo Silva (2013), o símbolo para designação de raízes foi usado pela primeira vez pelos árabes e o primeiro uso foi de Al-Qalasady (1412-1486), sendo que este vem da letra árabe ج, a primeira letra da palavra "Jadhir".

Muitos matemáticos, incluindo o suíço Leonardo Euler (1707-1783), acreditavam que o símbolo se origina da letra *r*, que é a primeira letra da palavra *radix*, que, em latim, se refere à mesma operação matemática.

Em 1202, no *Líber Abbaci* (Livro do Ábaco), de Leonardo Fibonacci (1170-1250), podemos encontrar a escritura "Radix quadratum 16 aequalis 4", em latim, que, traduzido para português, fica: " O lado do quadrado de área 16 é igual a 4". Podemos observar que a palavra *radix* não tem nada a ver com raiz, pois a tradução correcta de raiz é lado.

O início do uso da raiz quadrada no mundo ocidental está relacionado aos estudos de Fibonacci sobre obras de matemáticos árabes que já utilizavam lógica de aplicação semelhante a de raiz quadrada.

O símbolo √ foi visto pela primeira vez impresso sem a linha horizontal que fica sobre os números dentro da raiz em 1525 no "*Die Coss*", do matemático alemão Cristoph Rudolff (1499-1545).

Júnior (2018), alega que o índice que aparece no radical (como na notação moderna) é do matemático francês Albert Girad (1595-9632). Alguns anos depois, o matemático britânico John Wallis (1616-1703) escreveu, em 1655, o índice da seguinte maneira: $\sqrt{^3 x}$ (muito próximo da representação actual, $\sqrt[3]{x}$).

No entanto, o símbolo completo da raiz com a linha horizontal que fica sobre os números dentro da raiz é de 1637, do livro *" Lá Geometrie "*, de René Descartes (1596-1650), em que utilizou o símbolo da maneira com a qual hoje utilizamos. Neste livro, Descartes declara que toda a matemática é composta de apenas quatro ou cinco operações, que são: adição, subtracção, multiplicação, divisão e extracção das raízes, que pode ser considerada um tipo de divisão.

1.2. Definição e Propriedades da Raiz Quadrada

1.2.1. Definição de raiz quadrada

Definição 1: dados $a, b \in IR$ com $a \geq 0$ e $b \geq 0$, pomos que $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a$.

Exemplo: $\sqrt{36} = 6$, porque $6^2 = 36$.

1.2.2. Propriedades da raiz quadrada

1) $\sqrt{a^2} = |a|$

   Exemplo: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$

2) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$

   Exemplo: $\sqrt{4} \times \sqrt{16} = \sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$

3) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, b \neq 0$

   Exemplo: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

4) $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$ com $m \in Z$

   Exemplo: $\left(\sqrt{5}\right)^4 = \sqrt{5^4} = \sqrt{625} = 25$

1.2.3. Erros frequentes na aplicação das propriedades da raiz quadrada

Um dos assuntos em que os alunos apresentam grandes dificuldades é o cálculo envolvendo radicais. Deste modo, apresentaremos alguns erros apresentados pelos alunos em radicais de índice dois, chamada também de raiz quadrada.

Assim, segundo Passoni (2016), temos os seguintes erros frequentes apresentados pelos alunos:

1- O uso inadequado da propriedade 1 do item **1.2.2**). Vejamos a seguir um exemplo espelhando este erro:

$$\cancel{\sqrt{(-3)^2}} = -3$$

Isto acontece porque não levamos em consideração a definição de raiz quadrada, que diz que $\sqrt{a} = b$ se e somente se $b^2 = a$ com $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Logo, só seria possível simplificarmos o índice da raiz e o expoente do radicando se o radicando fosse positivo. O correcto, para o exemplo anterior, seria $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ ou $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.

2- Aplicação da propriedade **2)** na adição.

Observe-se: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$. Muitos alunos, para esta expressão, aplicam a mesma propriedade que se aplicaria na multiplicação, mas estão errados, uma vez que não temos simplificação para expressão deste tipo.

Observe-se, a partir de um exemplo, como resolver uma expressão deste tipo:

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

1.2.4. Classificação da raiz quadrada

Tendo em conta o resultado, a raiz quadrada pode ser classificada em dois tipos: exactas e não exactas (Correia, 2016).

- **Raiz quadrada exacta:** quando resulta num número racional, como uma fracção, um número inteiro, um número decimal, desde que, ao multiplicar este número por ele mesmo, encontremos exactamente o radicando.

Exemplo: $\sqrt{64}=8$; $\sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$; $\sqrt{6,25}=\sqrt{\frac{625}{100}}=\frac{25}{10}=2,5$

- **Raiz quadrada não exacta:** quando resulta num número irracional. Neste caso, procuramos uma aproximação melhor para a raiz desde número.

Exemplo: $\sqrt{2}=1,41421356$ ...

1.3. Aplicações do Cálculo da Raiz Quadrada

Segundo Nolasco (2009), "A importância de qualquer trabalho científico mede-se pela aplicabilidade em outras áreas, dando, assim, maior impacto no referido tema ". (p. 42)

Neste trabalho, abordaremos algumas aplicações do cálculo da raiz quadrada em quatro áreas específicas: Álgebra, Trigonometria, Física e Geometria.

1.3.1. Aplicação do cálculo da raiz quadrada na Álgebra

Uma das principais aplicações do cálculo da raiz quadrada na Álgebra centra-se nas equações quadráticas. Mostraremos como o cálculo da raiz quadrada é utilizada para resolver equações do segundo grau.

Segundo André e Nascimento (2008), uma equação quadrática é uma equação polinomial de segundo grau, em que a incógnita aparece elevada ao quadrado. A forma geral de uma equação quadrática é dada por $ax^2+bx+c=0$, em que x é a variável desconhecida, a,b e c são constantes reais conhecidas e $a\neq 0$.

A solução para a equação quadrática pode ser encontrada usando a fórmula de Bhaskara, que é uma fórmula que utiliza a raiz quadrada para encontrar as raízes das equações do segundo grau. Esta fórmula é dada por:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2.a}$$

Assim sendo, apresenta-se, a seguir, alguns exemplos para medir a importância do cálculo da raiz quadrada na Álgebra, em especial na resolução de equações do 2º grau.

1- Resolver as seguintes equações do segundo grau:

a) $x^2 + 4x + 3 = 0$

Usando a fórmula resolvente, temos:

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$a = 1; \quad b = 4; \quad c = 3$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2.a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2.} == \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2.} = \frac{-4 \pm 2}{2.}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$x_2 = \frac{-4 - 2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$s = \{-3; 1\}$$

b) $x^2 - 1225 = 0$

$$x^2 = 1225$$

$$x = \pm\sqrt{1225}$$

$$x = \pm 35$$

$$s = \{\pm 35\}$$

1.3.2. Aplicação do cálculo da raiz quadrada na Trigonometria

Neste item, vai materializar-se os conhecimentos aprendidos sobre o cálculo da raiz quadrada para solucionar situações trigonométricas. Abordaremos tópicos como teorema de Pitágoras e relações trigonométricas, mostrando, deste modo, como o cálculo da raiz quadrada é fundamental para a determinação de medidas de triângulos rectângulos e para a resolução de problemas envolvendo triângulos rectângulos.

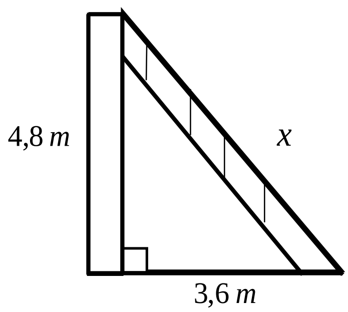
Vejamos, a seguir, alguns exemplos que espelham a importância do cálculo da raiz quadrada na trigonometria:

1. Deseja-se subir uma parede com $4{,}8\,m$ de altura. Para isso, apoia-se uma escada a $3{,}6\,m$ de distância dessa parede.
   1.1. Qual é a altura da escada em metros?

Façamos, primeiramente, o esboço que ilustra o problema

Figura 2

Esboço sobre o triângulo rectângulo



Como podemos observar, a figura acima representa um triângulo rectângulo, na qual se conhece dois dos seus lados.

Usando o teorema de Pitágoras, teremos:

$$x^2 = (3{,}6\,m)^2 + (4{,}8\,m)^2$$

$$x^2 = 12{,}96\,m^2 + 23{,}04\,m^2$$

$$x^2 = 36\,m^2$$

$$x = \sqrt{36\,m^2}$$

$$x = 6\,m$$

Resposta: logo, a escada tem $6\,m$ de altura

2- Determina $\cos\alpha$ sabendo que α é um ângulo e que $sen\alpha = \frac{1}{2}$.

Solução:

Recorrendo à fórmula fundamental da trigonometria, temos:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\frac{1}{4} + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1.3.3. Aplicação do cálculo da raiz quadrada na Física

Na Física, o cálculo da raiz quadrada é fundamental em vários campos, mas, para o presente tópico, centrar-nos-emos a sua aplicabilidade no cálculo da velocidade no MRUV (Movimento Retilíneo Uniformemente Variado), usando a equação de Torricelli e nos movimentos verticais no vácuo: queda livre.

No MRUV, há situações em que interessa relacionar a velocidade escalar v em função do espaço S feito com o emprego da chamada equação de Torricelli dada por: $v^2 = v_0^2 + 2aS$.

"Chama-se *queda livre* ao movimento de queda que ocorre sem interferência da resistência do ar. O movimento de queda livre é um movimento uniformemente acelerado, isto é, a velocidade do corpo aumenta sempre numa mesma proporção, " (Mangas, 2015, p.18).

Como o movimento de queda livre é um movimento rectilíneo uniformemente variado (MRUV), são válidas as funções:

$$v = v_0 + gt \qquad (1)$$

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2} \quad (2)$$

$$v = \sqrt{2gh} \quad (3)$$

$$t = \frac{v_0}{g} \text{ ou } t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (4)$$

Para melhor percebermos a importância do cálculo da raiz quadrada, vejamos os exemplos:

1. Uma fruta madura cai de uma árvore com velocidade inicial zero. Calcula a velocidade com que atinge o solo, sabendo que caiu de uma altura de $4{,}0\,m$

Dados	Fórmula	Cálculos
$v_0 = 0\,m$	$v^2 = v_0{}^2 + 2gh$	$v^2 = 0^2 + 2.9{,}8\,m/s^2.4{,}0\,m$
$g = 9{,}8\,m/s^2$		$v^2 = 0 + 78{,}4\,m^2/s^2$
$h = 4{,}0\,m$		$v = \sqrt{78{,}4m^2/s^2}$
$v = ?$		$v \approx 8{,}9\,m/s$

Resposta: a velocidade com que a fruta atinge o solo é de $8{,}9\,m/s$.

2. Calcula o tempo gasto por um objecto ao cair de uma altura de $30\,m$, supondo que parte do repouso e não sofre resistência do ar durante a queda.

Dados	Fórmula	Cálculos
$h = 30\,m$	$h = h_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$	$30m = 0.t + \frac{1}{2}.9{,}8\,m/s^2.t^2$
$h_0 = 0\,m$		$30\,m = 4{,}9\,m/s^2.t^2$
$g = 9{,}8\,m/s^2$		$t^2 = \frac{30m}{4{,}9m/s^2}$
$t = ?$		$t^2 = 6{,}122\,s^2$

$$t = \sqrt{6{,}122\, s^2}$$

$$t \cong 2{,}5\, s$$

Resposta: o tempo de queda do objecto é de $2{,}5\, s$.

1.3.4. Aplicação do cálculo da raiz quadrada na Geometria

Na Geometria, temos a destacar a aplicabilidade do cálculo da raiz quadrada para o estudo das relações entre figuras no espaço, o cálculo de área e perímetros de figuras geométricas e a determinação da distância entre dois pontos no plano cartesiano.

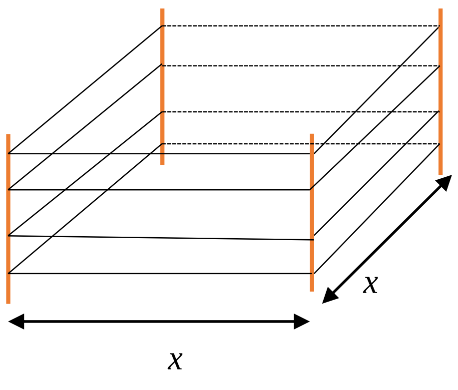
Vejamos, a seguir, um exemplo espelhado a aplicação da raiz quadrada na Geometria.

1. O pai do José pretende cercar um terreno de forma quadrada cuja área é de $169\, m^2$. Ele pretende colocar 4 fios de arame em cada lado do terreno e deixar um portão de $2\ m$ de comprimento num dos lados. Quantos metros de arame, no mínimo, precisará comprar?

Esboço do problema da Cerca do terrono do pai do José:

Figura 3

Esboço da cerca do terreno de forma quadrada



Como o terreno tem o formato de um quadrado, façamos apenas: $x.x = 169m^2$

$x^2 = 169\, m^2$

$x = \sqrt{169\,m^2}$

$x = 13\ m$

Isto implica dizer que cada lado do terreno mede $13m$.

Como o fundamental é determinarmos quantos metros de arame deve-se comprar ao todo, devemos, primeiramente, fazer $13m \times 4 = 52m$. Este resultado é o número de metros por cada lado.

Em seguida, fazemos $52m \times 4 = 208m$. Este resultado espelha o número total de arame para os quatro lados do terreno. Fazendo o desconto dos $2m$ do portão num dos lados, teremos: $208m - 8m = 200m$.

Resposta: o pai do José precisa comprar, no mínimo, $200m$ de arame.

1.4. Alternativas Metodológicas no Processo de Ensino-aprendizagem da Matemática

O processo de ensino caracteriza-se pela combinação de actividades do professor e do aluno. A direcção deste processo depende do trabalho sistematizado do professor que, tanto no planejamento, como no desenvolvimento das aulas, conjuga objectivos, conteúdos, métodos e formas organizativas do ensino.

O professor deve dirigir e estimular o processo de ensino em função da aprendizagem do aluno (Libâneo, 2006). Isto implica, do professor, pautar-se por um conjunto de acções, passos, condições externas e procedimentos, que chamamos de metodologias, para que todos os alunos compreendam, e, deste modo, contribuir para a riqueza intelectual destes.

De acordo com Ens e Donato (2011) citados por Barbosa (2019), a actividade de ensinar realiza-se a partir de conhecimentos específicos e necessários [...], os quais são adquiridos, construídos, na formação inicial e na formação que acontece durante toda a vida profissional. Desta forma, percebe-se a importância de os professores estarem abertos à inclusão de novas propostas de ensinar e à utilização de metodologias alternativas, oportunizando o enriquecimento profissional de professores adeptos da mudança, visando uma melhor compreensão por ambos os participantes do processo de ensino da Matemática.

As metodologias alternativas têm, dentre os seus objectivos, auxiliar os professores na prática pedagógica, possibilitando que aperfeiçoem as suas aulas, saindo da mesmice de aulas sem sentido (tradicional) para aulas interactivas, em que os professores e os alunos possam trabalhar lado a lado, na construção de uma aprendizagem significativa.

O objectivo fundamental do ensino é levar todos os alunos à compreensão, por isso, deve-se optar por alternativas, de modo que os alunos saiam satisfeitos e felizes.

Na aprendizagem da Matemática, cada aluno desperta um modo de agir diante de uma situação. Numa aula de Matemática, podemos encontrar vários caminhos para resolver um determinado exercício, mas, no final, obtém-se o mesmo resultado. Estes diversos modos de solucionar um exercício constituem uma riqueza para o aluno e ajudam-no a compreender os conteúdos matemáticos (Ponte & Serrazina, 2000).

Assim, podemos entender que o uso adequado e eficaz de metodologias alternativas visa assegurar a assimilação de conhecimentos, habilidades e a actualização das capacidades potenciais dos alunos, de modo que dominem métodos próprios de aprender.

1.4.1. Alternativas metodológicas no cálculo da raiz quadrada

Não existem alternativas metodológicas únicas, mas sim uma variedade de metodologias alternativas, cuja escolha depende dos conteúdos da disciplina, das situações didácticas e do desenvolvimento mental dos alunos.

Libâneo (2006), afirma que a escolha das metodologias implica o conhecimento das características dos alunos quanto à capacidade de assimilação (conforme a idade e o nível de desenvolvimento mental e físico) e às características socioculturais e individuais.

Nenhum ensino pode ser bem-sucedido se não partir de condições prévias dos alunos para enfrentarem os conhecimentos novos (Libâneo, 2006). Por isso, é necessário, antes de mais, investigar a situação individual e social do grupo de alunos, os conhecimentos e as experiências que eles já trazem, de modo que, nas situações didácticas, ocorra a ligação entre os objectivos e os conteúdos propostos pelo professor e as condições de aprendizagem dos alunos.

Como apresentado na introdução do trabalho, podemos observar que a pouca exploração dos métodos de resolução do cálculo da raiz quadrada por parte dos professores tem causado fortes debilidades aos alunos, levando-os a encarar o cálculo da raiz quadrada como algo de difícil compreensão e execução.

Com intuito de facilitar a compreensão dos alunos concernente aos métodos abordados, como factorização, tentativas e erros, bissecções e tradicional, optou-se em fazer uma abordagem do cálculo da raiz quadrada recorrendo a um método alternativo, de modo a facilitar o professor nas suas práticas pedagógicas, bem como levar todos os alunos, inclusive aqueles com dificuldades nos métodos acima mencionados, ao entendimento. A alternativa que vamos abordar ao longo deste trabalho baseia-se no "*Método de Jonofon Sérates para a Extracção da Raiz Quadrada".*

O método seleccionado como alternativo para o cálculo da raiz quadrada consiste numa sequência de subtracções de números ímpares, facilitando, assim, os alunos na extracção da raiz quadrada, uma vez que, com essa alternativa, eles lidem, fundamentalmente, com as operações elementares de adição e subtracção.

O ensino do cálculo da raiz quadrada por parte dos professores não deve centrar-se, anos após anos, nos mesmos métodos e técnicas: é necessário inovar, de modo que os alunos possam olhar à Matemática, não como uma ciência acabada e sem nada atraente, mas sim com um olhar de entusiasmo e motivação, permitindo que, em sala de aula, todos compreendam os conteúdos, pois, ao apresentar-se aos alunos alternativas para a compreensão do cálculo da raiz quadrada, lhes dá a liberdade de escolha e possibilidade de iniciativas e descobertas, tornando, deste modo, o ensino da Matemática mais agradável além de lhes alargar o leque de conhecimento.

Libâneo (2006), afirma que os métodos alternativos são as acções que o professor utiliza para organizar as suas actividades de ensino para atingir os objectivos do trabalho docente em relação a um conteúdo específico. Estes métodos regulam as formas de interacção entre o ensino e a aprendizagem, entre o professor e os alunos, cujo resultado é a assimilação consciente dos conhecimentos e o desenvolvimento das capacidades cognitivas e operativas dos alunos.

1.5. Tratamento Actual do Cálculo da Raiz Quadrada na 9ª Classe

Para Silva (2013), a raiz quadrada de um número real não negativo x é um número real y não negativo que, ao multiplicarmos por si próprio, é igual a x. Ou seja, encontrar a raiz quadrada de um número real $x \geq 0$ é encontrar um número real y tal que $y^2 = x$.

O estudo do cálculo da raiz quadrada está plasmado na I Unidade do Programa da 9ª Classe, do sistema de ensino angolano. Até aos dias actuais, pode-se dizer que, nos mais variados processos de ensino-aprendizagem e referências bibliográficas constatadas, se aborda muito mais o cálculo da raiz quadrada, fazendo recurso aos métodos de tentativas e erros, das bissecções, da factorização e tradicional. Assim sendo, apresentaremos, de forma sintética e sistemática, como é feita a abordagem do cálculo da raiz quadrada, fazendo uso dos métodos acima referidos.

1.5.1. Métodos para o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe

1.5.1.1. Cálculo da raiz quadrada pelo método de tentativas e erros

Suponhamos que queremos calcular a raiz quadrada de um número real não negativo a. Pela definição de raiz quadrada, $\sqrt{a}$ é um número real positivo b para o qual $b^2 = a$.

Assim, calcular a raiz quadrada de um número real positivo a significa encontrar um número positivo b, tal que, o quadrado de b seja a.

Este método para o cálculo da raiz quadrada de um número a consiste em procurar números cujo quadrado se aproxima cada vez mais de a. Assim, pode-se dizer que o método de tentativas e erros é um método aproximado e iterativo que envolve estimativa sucessiva de uma raiz quadrada até se alcançar uma aproximação aceitável.

Para Lima (2013), a escolha da nova aproximação depende de como o quadrado da aproximação da raiz anterior se aproxima por falta ou por excesso do número a. Caso essa aproximação ocorra por falta, adopta-se um dígito maior que aquele anteriormente testado; no caso em que esta aproximação ocorra por excesso, adopta-se um dígito menor.

Exemplo:

- Encontrar a $\sqrt{144}$ pelo método de tentativas e erros.

Suponha-se que, inicialmente, se tenha pensado no número 10. Neste caso, quando elevado 10 ao quadrado, vê-se que $10^2 < 144$, o que permite dizer que a $\sqrt{144} > 10$ e, por outro lado, $10^2 = 100$; assim, pode-se procurar outros números maiores que 10, e calcular o respectivo quadrado. O próximo número é o 11; neste caso, elevando ao quadrado, temos $11^2 = 121$. Vê-se, ainda, que $11^2 < 144$ parte-se para o próximo número maior que 11, que é o 12; elevando 12 ao quadrado, tem-se $12^2 = 144$; logo, conclui-se que $\sqrt{144} = 12$.

1.5.1.2. Cálculo da raiz quadrada pelo método das bissecções

O método das bissecções baseia-se no teorema do valor intermédio, dado a seguir:

Teorema 1: Seja $f:[a,b] \to IR$ é contínua em $[a,b]$, tal que $f(a)f(b) < 0$, então, existe um $r \in (a,b)$ tal que $f(r) = 0$.

Este método consiste em escolher uma sequência infinita de intervalos encaixados, de comportamentos cada vez menores, de modo que todos eles contenham a raiz desejada.

Apesar da velocidade de convergência deste método, é bastante lento, uma vez que os alunos apresentam fortes debilidades na divisão de números decimais; pode ser aplicado para obter uma aproximação para qualquer raiz quadrada de um número real positivo.

Tomemos o símbolo $\sqrt{k}$ para representar a raiz quadrada positiva de k. Desta forma, x e y são números positivos; assm, temos: $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$.

Logo, dado um número $k > 0$, pode-se, facilmente, localizar o valor de $\sqrt{k}$ entre dois números naturais consecutivos, $a, a+1$; depois, procede-se calculando, sucessivamente, a média entre os extremos para aproximar, satisfatoriamente, a $\sqrt{k}$.

Suponha-se que se queira calcular $\sqrt{k}$. O método consiste em considerar a função $f(x) = x - \sqrt{k}$, que é contínua em IR, portanto, contínua em qualquer $[a,b]$.

O objectivo é encontrar um intervalo $[a,b]$, tal que $f(a).f(b)<0$, que, pelo teorema do valor intermédio, se pode afirmar que existe um $r \in (a,b)$, tal que $f(r) = r - \sqrt{k} = 0$, ou seja, $r - \sqrt{k} = 0 \Rightarrow r = \sqrt{k}$.

Por exemplo, para calcular $\sqrt{11}$, procedemos da seguinte maneira:

Considere $f(x) = x - \sqrt{11}$

Como $9 < 11 \Rightarrow 3 < \sqrt{11} \Rightarrow 3 - \sqrt{11} < 0$

$16 > 11 \Rightarrow 4 > \sqrt{11} \Rightarrow 4 - \sqrt{11} > 0$

Como $9<11<16$, segue-se que $3<\sqrt{11}<4$

Como $\frac{3+4}{2} = (3,5)^2 \Rightarrow =12,25$, segue-se que $3<\sqrt{11}<3,5$

Como $\frac{3+3,5}{2} = (3,25)^2 \Rightarrow =10,5625$, segue-se que $3,25<\sqrt{11}<3,5$

Como $\frac{3,25+3,5}{2}=(3,375)^2 \Rightarrow =11,390625$, segue-se que $3,25<\sqrt{11}<3,375$

Como $\frac{3,25+3,375}{2}=(3,3125)^2 \Rightarrow =10,97265625$, segue-se que $3,3125<\sqrt{11}<3,375$

E, assim, sucessivamente.

O processo geral é óbvio: se $a_n<\sqrt{11}<b_n$, achamos o ponto médio do intervalo $[a_n , b_n]$; se $m_n{}^2>\sqrt{11}$, fazemos $a_{n+1}=m_n$, $b_{n+1}=b_n$ e repetimos o processo.

É claro que, se $a_n<\sqrt{11}<b_n$, então o erro cometido escolhido como aproximação de $\sqrt{11}$ qualquer ponto do intervalo $[a_n , b_n]$ será menos do que $|a_n - b_n|$. Em cada passo, aproximamos $\sqrt{11}$ pelo ponto médio m_n do intervalo $[a_n , b_n]$. Representemos por e_n o erro cometido em cada passo, ficando: $e_n=|a_n-b_n|$.

1.5.1.3. Cálculo da raiz quadrada pelo método de factorização

Segundo Stoodi (2013), o método de factorização consiste em decompor o radicando em factores primos, sendo um método simples e prático, embora se limite ao cálculo de raízes exactas, pois envolve factorização, radiciação, divisão e multiplicação, sendo este método baseado no Teorema Fundamental da Aritmética, dado a seguir:

Teorema 2: Todo número natural maior que 1 ou é primo ou escreve-se de modo único (excepto pela ordem dos factores) como um produto de números primos.

Segundo Junior (2018), um número $p \in IN$ é dito primo quando:

1- $p \neq 0$ e $p \neq 1$;

2- Os únicos divisores de p são 1 e p;

3- Seja $n \in IN$, $n \neq 0$ e $n \neq 1$ é denominado composto se n não é primo. Deste modo, o número composto pode ser factorizado num produto $n=a.b$, no qual $a \neq 1$ e $b \neq 1$.

Observação: os números 0 e 1 não são primos nem compostos.

Para melhor esclarecimento do método, tomemos os seguintes exemplos:

Exemplo 1:

- Encontrar a $\sqrt{144}$ pelo método de factorização.

Em primeiro lugar, devemos decompor o número 144 (radicando) em factores primos, tendo:

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Logo, percebe-se que $144 = 2^4 \times 3^2$. Com isto, tem-se:

$$\sqrt{144} = \sqrt{2^4 \times 3^2} = \sqrt{2^4} \times \sqrt{3^2} = 2^{\frac{4}{2}} \times 3^{\frac{2}{2}} = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12\,.$$

Exemplo 2:

- Encontrar $\sqrt{1{,}69}$ pelo método de factorização.

Em primeiro lugar, transformemos o radicando em fracção, ficando:

$1{,}69 = \dfrac{169}{100}$,

Em seguida, decompomos o 169 e o 100 em factores primos, ficando:

$$\begin{array}{r|l} 169 & 13 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$169 = 13^2$ $\qquad\qquad$ $100 = 2^2 \times 5^2$

Assim, temos: $\sqrt{1{,}69} = \sqrt{\dfrac{169}{100}} = \sqrt{\dfrac{13^2}{2^2 \times 5^2}} = \dfrac{13}{10} = 1{,}3$

1.5.1.4. Cálculo da raiz quadrada pelo algoritmo tradicional

Segundo Ferrari e Cechinel (n.d), um algoritmo é uma sequência finita de passos (instruções) para resolver um determinado problema. Sempre que se desenha um algoritmo, está-se a estabelecer um padrão de comportamento, que deverá ser seguida (uma norma de execução de acções) para alcançar o resultado de um problema.

Assim sendo, mostrar-se-á, de forma clara, como funciona e como é feito o cálculo da raiz quadrada, fazendo recurso ao algoritmo tradicional a partir de um exemplo.

Exemplo 1:

- Apresentaremos como se usa o algoritmo tradicional para extrair a raiz quadrada de 64516.

Em primeiro lugar, agrupam-se os algarismos da direita para esquerda de dois em dois. Depois, procura-se o maior número natural $a_n^2 \leq 6$.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{\;a_n\;} \\ & \end{array}$$

Neste exemplo, $a_n = 2$. Agora, subtrai-se de 6 o quadrado de 2. Encontramos, como resposta:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{2\;\;} \\ \underline{-4\;\;} & \\ \;\;2 & \end{array}$$

Em seguida, baixa-se o próximo bloco, o 45 formando 245, e separamos o último algarismo por um ponto: 24.5.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{\;2\;\;\;\;\;\;} \\ \underline{-4\;\;} & \\ \;\;24.5 & \end{array}$$

Posteriormente, dobra-se o valor da raiz já encontrado $(2 \times 2) = 4$, e escreve-se no canto inferior direito do dispositivo.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{6.45.16} & \underline{2\qquad\quad} \\
\underline{-4\ } & 2\times 2=4 \\
24.5 &
\end{array}
$$

Em seguida, no resto, temos 24.5. Divide-se o número à esquerda do ponto, o 24, pelo valor que acabamos de calcular, o 4, tendo: $(24 \div 4 = 6)$. Este quociente será, provavelmente, o próximo algarismo da raiz. Para saber se é de facto, escrevemos o 6 ao lado de 4, ficando 46, e multiplicamo-lo por 6, ficando: $46 \times 6 = 276$. Subtrai-se este valor do resto.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{6.45.16} & \underline{2\qquad\quad} \\
\underline{-4\ } & 2\times 2=4 \\
24.5 & 46\times 6=276
\end{array}
$$

Como $46 \times 6 = 276 > 245$, experimenta-se, rapidamente, o inteiro inferior, ficando:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{6.45.16} & \underline{2\qquad\quad} \\
\underline{-4\ } & 2\times 2=4 \\
24.5 & 45\times 5=225
\end{array}
$$

Pelo facto de o produto obtido ser inferior ao resto parcial, subtrai-se este produto do resto parcial, e coloca-se o quociente ao lado da raiz (o número que representa o valor da raiz da classe mais à esquerda: 1º algarismo).

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{6.45.16} & \underline{25\qquad\ } \\
\underline{-4\ } & 2\times 2=4 \\
24.5 & 45\times 5=225 \\
\underline{-225} & \\
2016 &
\end{array}
$$

Em seguida, baixa-se o próximo bloco, no caso, 16, formando o 2016, e separa-se o último algarismo por um ponto: 201.6.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{25\quad} \\ \underline{-4\quad} & 2\times 2=4 \\ \quad 24.5 & 45\times 5=225 \\ \underline{\ -225\ } & \\ \quad 201.6 & \end{array}$$

Em seguida, dobra-se o valor já encontrado $(2\times 25)=50$, e escreve-se no canto inferior direito do dispositivo.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{25\quad} \\ \underline{-4\quad} & 2\times 2=4 \\ \quad 24.5 & 45\times 5=225 \\ \underline{\ -225\ } & 2\times 25=50 \\ \quad 201.6 & \end{array}$$

A seguir, no resto, temos 201.6. Divide-se o número à esquerda do ponto no resto, no caso, o 201, pelo valor que se calculou, 50: ($201\div 50=4$). O quociente obtido, 4, será, provavelmente, o próximo algarismo. Para se descobrir se é realmente, escrevemos o 4 ao lado de 50, ficando 504, e multiplicamo-lo por 4 ficando: $504\times 4=2016$. Por fim, subtrai-se este valor do resto.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{6.45.16} & \underline{254\quad} \\ \underline{-4\quad} & 2\times 2=4 \\ \quad 24.5 & 45\times 5=225 \\ \underline{\ -225\ } & 2\times 25=50 \\ \quad 201.6 & 504\times 4=2016 \\ \underline{\ -2016\ } & \\ \quad 0 & \end{array}$$

Logo, $\sqrt{64516}=254$.

1.6. Análise do Programa de Matemática da 9ª Classe

Na perspectiva de Queria e Barros (2020), programa é um documento que permite organizar e detalhar o processo pedagógico; orienta o professor em relação ao conteúdo que deve transmitir e como deve desenvolver as actividades para o alcance dos objectivos. No caso angolano, é um documento aprovado, oficialmente, pelo Ministério da Educação. O programa é um documento de trabalho do professor e de cumprimento obrigatório, pois, através dele, o professor toma conhecimento de:

- O que se deve alcançar no ensino (objectivos);
- Com que se tem de alcançar (conteúdo);
- Como se pode alcançar (métodos).

"Assim, para o professor preparar as suas aulas, tem um guia, que é o programa; a par deste, estão os livros de texto," (Cahamba, 2014, p. 20).

O programa de Matemática da 9ª classe, actualizado em 2019, de forma geral, apresenta: (1) importância da disciplina/introdução à disciplina, (2) objectivos gerais e específicos, (3) distribuição temática dos conteúdos, (4) indicações metodológicas, (5) indicações para a distribuição do tempo; mas não apresenta: (1) o objecto de estudo, (2) os objectivos sociais do aprendizado (valores) e (3) o perfil do professor da disciplina.

É importante salientar ainda que, quanto à distribuição temática dos conteúdos, o programa oferece o conteúdo do cálculo da raiz quadrada na primeira unidade, "Aprofundamento dos Números e Operações", com o seu respectivo objectivo específico, mas com uma distribuição de tempo muito reduzida, insuficiente para um bom ensino e uma boa aprendizagem do cálculo da raiz quadrada.

Face ao exposto acima, tem-se os seguintes aspectos:

Aspectos positivos

- Existência do programa de Matemática do I Ciclo do Ensino Secundário;
- Contém os objectivos;
- Existência do conteúdo sobre cálculo da raiz quadrada.

Aspectos negativos

- Não apresenta o objecto de estudo da disciplina de Matemática, o sistema de valores, as formas organizativas das aulas e o perfil do professor da disciplina;
- Os objectivos apresentados não abrangem aspectos educacionais;

- Pouco tempo para o tratamento do cálculo da raiz quadrada.

1.7. Análise do Cálculo da Raiz Quadrada nos Livros Didácticos da 9ª Classe

Bittar (2017), define o livro didáctico como sendo um recurso usado por professores e alunos nos processos pedagógicos, e fornece uma aproximação prática e concepções em aulas.

O livro didáctico aparece como instrumento regulador, com objectivo de normalizar o que se vai ensinar na escola, o saber ensinar, caracterizando uma das etapas da transposição didáctica, que Pais (2002) citado por Neto (2009), define como sendo:

Transposição didáctica é analisada como a passagem do saber científico, produzido na dimensão académica, para o saber ensinado pelos professores em sala de aula. Nessa trajectória, o conteúdo escolar ainda passa pelo estatuto de um saber a ser ensinado.

O livro didáctico é um material importante do quotidiano escolar; influencia directamente nos processos de ensino do professor e da aprendizagem do aluno. No ambiente escolar, o livro didáctico é um instrumento útil para professores e alunos, uma vez que serve tanto para o professor, como apoio pedagógico, auxiliando-lhe na sua prática, como para o aluno, na realização de actividades.

Apesar de toda a importância do livro didáctico, os professores devem assumir um lugar de destaque:

> "Embora o livro didáctico seja um recurso importante no processo de ensino-aprendizagem, ele não deve ocupar um papel dominante nesse processo. Assim, cabe ao professor manter-se atento para que a sua autonomia pedagógica não seja comprometida. Não é demais insistir que, apesar de toda a sua importância, o livro didáctico não é o único suporte para o trabalho pedagógico do professor" (*Brasil, 2011, citado por Brandão ,2013).*

Entende-se, então, que o livro didáctico não deve ser utilizado nem transformado como um programa de ensino nem como principal fonte de conhecimento do que se vai ou está a ensinar. Os livros didácticos, devem ser cuidadosamente analisados e seleccionados pelo professor, tendo em conta a metodologia e a linguagem científica utilizada, as particularidades individuas dos estudantes e os objectivos estabelecidos no programa.

Assim sendo, apresenta-se, a seguir, uma análise sobre o ensino do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe a partir dos livros didácticos adoptados e aprovados pelo Ministério da Educação de Angola.

O livro ”Matemática, da Teoria à Prática“, da 9 ª classe, de Domingos Monteiro, lançado em 2015, constituído por quatro unidades, no seu Tema A, “*Aprofundamento do Estudo dos Números e Operações”*, e no seu subtema A6, espelha a abordagem de “*propriedades e operações com radicais de índice dois”*. Neste subtema, o autor começa por definir a raiz quadrada; em seguida, apresenta as propriedades dos radicais e, finaliza com a racionalização dos denominadores.

O livro ”Caderno de Actividades Matemáticas“, da 9ª classe, de Zola Corder, lançado em 2013, igualmente constituído por quatro unidades, no seu Tema A e subtema A8, aborda “*propriedades e operações com radicais de índice dois*”, no qual começa com a definição da raiz quadrada da seguida forma: “se a raiz quadrada de um número real a é um número b, então o quadro de b é a. Ou seja, $\sqrt{a} = b$, então $b^2 = a$ ”.

O referido livro, além de apresentar alguns exemplos de cálculos de radicais com índice par, faz referência às propriedades dos radicais e à racionalização dos denominadores, com os seus respectivos exemplos.

Ao passo que o “Livro de Matemática”, de Isabel Nascimento e Diasala André, de 2018, não faz abordagem aos radicais.

Assim, pode-se afirmar que os livros acima mencionados (excepto o “Livro de Matemática”, de Isabel Nascimento e Diasala André, de 2018), fazem referência aos radicais de índice dois, mas não abordam o cálculo da raiz quadrada, o que nos leva a concluir que não existe uma consonância entre o programa e o manual da classe.

1.8. Teorias Psicopedagógicas no Processo de Ensino-aprendizagem

A Psicopedagogia é uma área do saber científico que estuda os processos relacionados com a aprendizagem humana, ou seja, visa explicar como o processo de aprendizagem ocorre (Martins et al., 2018). A preocupação da psicopedagogia é com o ser que aprende; o seu objectivo principal é trabalhar este ser, potencializando-o como pessoa construtora da sua história de conhecimento, inserida num contexto social.

Jamba (2019), "afirma que não é suficiente dizer que os alunos precisam dominar os conhecimentos; é imperativo dizer como fazê-lo, isto é, investigar objectivos e métodos seguros para assimilação dos conhecimentos" (p. 42).

Libâneo (2006), citado por Jamba (2019) destaca que o processo de ensino-aprendizagem pode ser considerado como uma sequência de actividades do professor e do aluno, tendo em vista a assimilação de conhecimentos e desenvolvimento de habilidades, através dos quais os alunos aprimoram capacidades cognitivas. Assim, podemos dizer que todo o processo de assimilação de conhecimento parte de um processo, em que Weiss (2002) destaca como diagnóstico psicopedagógico, cujo objectivo é identificar os desvios e os obstáculos do sujeito, que o impedem de crescer na aprendizagem, dentro do esperado pelo meio social.

A finalidade do processo de ensino, em consonância com a Psicopedagogia, é de proporcionar aos alunos os meios para assimilarem activamente os conhecimentos, porque a natureza do trabalho docente é auxiliar a ligação cognitiva entre o aluno e o novo saber. Isto implica dizer que o ensino não se deve pautar, apenas, pela transmissão de informações aos alunos, mas sim deve ser um meio de organizar a actividade e o conhecimento das peculiaridades de estudo dos alunos. Nisto, o estudo é bem-sucedido, quando os objectivos preconizados pelo professor coincidem com os objectivos e interesses dos alunos e é praticado de acordo com o desenvolvimento das suas forças intelectuais. Por isso, a condução do processo de ensino requer uma compreensão clara e segura do processo de aprendizagem (Jamba, 2019).

Na contemporaneidade, observa-se que a Psicopedagogia pauta a sua acção em três fundamentações teóricas: A Psicanálise, o Associacionismo e o Construtivismo.

1- A Psicanálise

Segundo Martins et al. (2018), a Psicanálise explica a realização emocional entre o professor e o aluno, permitindo, deste modo, a criação do vínculo emocional entre o professor e o aluno, para que ocorra a aprendizagem (criação de condições e ambientes agradáveis, valorizantes e estimulantes para o aluno).

É preciso entender que a aprendizagem da Matemática, em qualquer assunto, pode ser influenciado por factores psicológicos, emocionais e sociais. Por exemplo, os alunos podem enfrentar bloqueios de ansiedade, medo de errar e falta de confiança nas suas habilidades matemáticas, que podem afectar negativamente a aprendizagem.

Neste sentido, é fundamental entender as dificuldades individuais dos alunos no cálculo da raiz quadrada, oferecendo suporte e estratégias de aprendizagem adaptativas; promover a confiança e a motivação, através de um ambiente seguro, livre de julgamentos, onde os alunos se sintam motivados a enfrentar desafios matemáticos, incluindo o cálculo da raiz quadrada.

A Psicanálise ajuda a abortar crenças limitantes (negativas) ou auto-limitantes relacionadas à Matemática e à aprendizagem em geral, ajudando aos alunos a superar essas barreiras emocionais em diferentes momentos da vida real (Martins et al., 2018).

Assim, explorar conexões e aplicações da raiz quadrada em diferentes contextos da vida real ajuda-os a entender a relevância e o valor desse conceito matemático.

2- O Associacionismo

O Associacionismo parte do princípio de que a aprendizagem se dá por um processo de associação das ideias, das mais simples às mais complexas. Assim, para que se aprenda um conteúdo complexo, a pessoa precisará, primeiro, aprender as ideias mais simples, que estariam associadas a determinado conteúdo.

Martins et al. (2018), referem que, o associacionismo valoriza a sua concepção no tecnicismo. Neste caso, prevalece o elemento externo sobre o cognitivo. Exemplos: o trabalho didáctico-metodológico do professor, a atractividade dos materiais didácticos, a arrumação das salas de aulas, entre outros aspectos, como elementos externos do sujeito que aprende, requerendo do professor a explicação de técnicas que simulem a actividade cognitiva para a aprendizagem. No caso da raiz quadrada, o associacionismo pode ser aplicado para ajudar a compreensão e memorização dos procedimentos de cálculo. O cálculo da raiz quadrada envolve encontrar o valor que, quando multiplicado por si mesmo, resulta no número desejado. Por exemplo, a raiz quadrada de 144 é 12, porque $12 \times 12 = 144$, mas nem sempre é fácil.

Uma abordagem associacionista para o cálculo da raiz quadrada correspondente seria relembrar aos alunos o conceito de potências, de modo a fazerem uma associação entre os dois conceitos. Ao interiorizar essas associações, podemos usar este conhecimento para estimular ou calcular a raiz quadrada de outros números.

Portanto, entende-se que o associacionismo é uma abordagem que busca encontrar relações e associações entre diferentes elementos para facilitar o processo de aprendizado e compreensão do aluno.

3- O Construtivismo

Construtivismo é uma tese epistemológica que defende o papel activo do sujeito na construção e modificação das suas representações do objecto do conhecimento.

Para Piaget, o Construtivismo exige uma interacção necessária entre o sujeito e o objecto de conhecimento. O sujeito é activo e constrói as suas representações de modo interactivo com o objecto. O processo de criação de algo inclui conceitos, interpretações, deduções e análises.

Ainda segundo Piaget, citado por Ponte e Serrazino (2000), realça-se que as pessoas desenvolvem esquemas ou modelos conceituais por assimilação e acomodação de novas informações, e estes conceitos podem ser explicados com a colocação de novas informações em esquemas existentes e alterando-os, a fim de acomodar novas informações.

Vigotsky, citado por Mateus (2007) afirma que a criança aprende melhor quando é confrontada com tarefas que impliquem desafio cognitivo não muito discrepante, ou seja, que a situem naquilo a que Vigotsky chama de “zona de desenvolvimento proximal”. Esta teoria tem implicações importantes no processo de instrução: o professor deve proporcionar ao aluno a oportunidade de aumentar a sua competência e conhecimento, partindo daquilo que já sabem, levando-os a interagir com outros alunos, em processo de aprendizagem cooperativa.

Assim sendo, os conteúdos sobre o cálculo de raiz quadrada devem ser apresentados aos alunos, de modo a explorar toda vasta gama de conhecimento subsunçor deles, a fim de lhes proporcionar o aumento das suas potencialidades, criatividades e imaginação.

A Psicopedagogia permite estudar a pessoa e o seu meio envolvente nas várias etapas da aprendizagem, considerando as potencialidades cognitivas, afectivas e socais, para melhor desenvolvimento da aprendizagem dos alunos.

O processo da aprendizagem constitui a principal finalidade da Psicopedagogia. Isto implica dizer que, se o professor é o elemento que viabiliza o processo de construção de conhecimento, então, pode-se estabelecer uma relação entre este processo e o professor; dessa relação, pode-se sublinhar o papel da Psicopedagogia no contexto da formação do professor (Martins et al., 2018).

1.9. Características Psicopedagógicas dos Alunos da 9ª Classe

Conforme o inquérito por questionário aplicado, os alunos da 9ª classe encontram-se na faixa etária dos 13 e os 25 anos. Segundo os estádios de desenvolvimento cognitivo da teoria de Piaget, apresentado por Ponte e Serrazina (2000), nesta fase, os alunos da 9ª classe encontram-se no estágio das operações formais, na qual está apto para realizar operações mentais que envolvam abstracções e símbolos que não necessariamente têm formas concretas, ou seja, têm a capacidade do raciocínio abstracto.

Nesta fase, começa-se e observa-se nos alunos as potencialidades para a assimilação consciente dos conceitos científicos, dando origem ao pensamento que opera com abstracções, cujos pensamentos lógicos, como a comparação e a generalização, começam a alcançar níveis mais significativos no plano teórico.

A característica mais importante, nesta fase, é o desenvolvimento do pensamento hipotético-dedutivo: as crianças aprimoram as suas habilidades de formular hipóteses para explicar e resolver problemas. O professor deve ter em conta essas potencialidades e aproveitá-las para a organização do processo de ensino e aprendizagem.

Segundo o exposto acima, conclui-se que, na 9ª classe, os alunos possuem maturidade psicológica para compreender o cálculo da raiz quadrada. Neste momento, deve-se prestar especial atenção aos alunos com dificuldades de aprendizagem e assegurar a sua compreensão dos conteúdos.

As actividades de aprendizagem e as habilidades para cálculo, classificação, dedução, observação, planificação, controlo e valorização da aquisição do conhecimento devem constituir pontos importantes para a idade compreendida entre os 13 e os 25 anos.

Deste modo, ao terminar a 9ª classe, o aluno deve ter um desempenho intelectual que lhe permita calcular, comparar, abstrair e realizar o controlo valorativo da sua actividade de aprendizagem.

1.10. Conclusão do Capítulo

Ao fim deste capítulo, chegou-se às seguintes conclusões:

- É papel do professor ajudar o aluno a construir seu próprio conhecimento, tal como enfatiza o construtivismo;
- As alternativas metodológicas, no processo de ensino-aprendizagem, garantem o alargamento do leque de conhecimento dos alunos e dá-lhes a liberdade de escolha e possibilidade de iniciativas e descobertas, tornando, deste modo, o ensino da matemática mais atraente;
- Os alunos da 9ª classe possuem maturidade psicológica necessária para compreender o cálculo da raiz quadrada.
- A atenção pedagógica por parte dos professores tem uma grande influência nas habilidades de compreensão nos alunos;
- Os professores devem possuir conhecimentos psicopedagógicos necessários que lhes permitam identificar as dificuldades, as debilidades e as particularidades de aprendizagem de cada aluno.

CAPITULO II: PROPOSTA DE UMA ALTERNATIVA METODOLÓGICA PARA O CÁLCULO DA RAIZ QUADRADA NA 9ª CLASSE

2.0. Introdução

A raiz quadrada de um número real não negativo é um número real não negativo que, ao multiplicar por si próprio, é igual ao radicando. As operações com radicais começam na 9ª classe e, segundo o Programa do I Ciclo do Ensino Secundário, é, também, na 9ª Classe, que se inicia o cálculo da raiz quadrada.

Foi a necessidade de se rever a forma como se ensina o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe que suscitou este trabalho de investigação, visto que algumas insuficiências dos alunos se encontram nos métodos para a extracção da raiz quadrada.

Neste capítulo, faz-se a análise da situação actual do problema de investigação e apresenta-se uma proposta de solução do problema, com objectivo de facilitar a abordagem ao cálculo da raiz quadrada por parte dos professores possibilitando um aprendizado por parte dos alunos, gerando, assim um ambiente de bem-estar na sala de aula.

Refira-se que a proposta de alternativa para o cálculo da raiz quadrada que vamos apresentar neste capítulo se baseia no método de Jonofon Sérates, que consiste na sequência de subtracções de números ímpares, enquadrando-se às características psicopedagógicas dos alunos da 9ª classe, pois trabalharão com as operações fundamentais de adição e subtracção.

2.1. Análise dos Resultados da Aplicação dos Instrumentos de Investigação

Para a caracterização do estado actual do processo de ensino-aprendizagem do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe, fez-se:

1- Análise aos cadernos, para verificar se, de facto, possuem conteúdo sobre o cálculo da raiz quadrada;
2- Análise aos manuais escolares da 9ª classe utilizados no sistema vigente, para verificação de exercícios sobre o cálculo da raiz quadrada;
3- Entrevista a coordenadora, para constatar os procedimentos e as metodologias empregues nas ZIP para motivar e ensinar o cálculo da raiz quadrada;

4- Aplicação de um inquérito por questionário aos alunos, para darem as suas opiniões sobre a abordagem do cálculo da raiz quadrada;
5- Aplicação de um teste aos alunos, para medir o seu nível de conhecimento em relação ao tema em estudo;
6- Aplicação de um inquérito por questionário aos professores, com a finalidade de darem, também, as suas opiniões sobre como têm abordado, com os alunos, o cálculo da raiz quadrada.

Na aplicação dos inquéritos aos alunos e aos professores, teve-se em conta uma população de 209 alunos da 9ª classe e 2 professores, onde a amostra foi de 136 alunos e de 2 professores, sendo todos os alunos e professores do Complexo Escolar 116 “Imaculada Conceição” – Lubango.

Na revisão feita aos cadernos, considerou-se o número de cadernos, tendo em conta o número de alunos do tamanho da amostra, com um total de 136 cadernos revistos.

Dos 136 alunos que responderam ao inquérito, 58 (42,6%) são do género masculino e 78 (57,4%) do feminino. A faixa etária dos alunos esteve entre os 13 e os 25 anos.

Entre os professores questionados, 2 (100%) são do género feminino, uma com 28 anos de serviço como professora e outra com 20 anos de serviço como professora, sendo que uma lecciona a 9ª classe há 20 anos e a outra lecciona a 9ª classe há 12 anos.

Os resultados do inquerito aplicado aos alunos e aos professores e outros instrumentos da pesquisa, concederam realizar uma análise por dimensões fragmentada em vários indicadores, na dimensão pedagógica, os indicadores são: estratégias metodológicas para o cálculo da raiz quadrada nas reuniões da ZIP, procedimentos para o cálculo da raiz quadrada e dificuldades dos alunos no cálculo da raiz quadrada; na dimensão dos pré-requisitos (professor e alunos), temos a destacar os seguintes indicadores: ensino do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe, área de formação dos professores e interesse dos alunos para a aprendizagem do cálculo da raiz quadrada; na dimensão científica, temos a destacar o indicador: habilidades para o cálculo da raiz quadrada.

Dimensão Pedagógica

- Indicador: estratégias metodológicas para o cálculo da raiz quadrada nas reuniões da ZIP.

Para este indicador, foi realizada uma entrevista a coordenadora, que afirmou que, as estratégias metodológicas para o cáculo da raiz quadrada não são delineadas nas reuniões da ZIP, uma vez que nem a todos os conteúdos planificados são sugeridos as suas estratégias metodológicas, o que nos leva a concluir que não existe um guia metodológico que sirva de apoio e orientação dos professores na preparação das suas aulas, somente a realização de reuniões, onde são distribuídos conteúdos a leccionar num determinado intervalo de tempo.

Ainda, quanto às metodologias, o coordenador afirmou que, mesmo quando são sugeridas metodologias na ZIP, nem sempre são cumpridas, tendo em conta as particularidades individuais de cada escola, dos alunos e do professor. Assim, podemos classificar este indicador como sendo não adequado.

- Indicador: procedimentos para o cálculo da raiz quadrada.

Os resultados deste indicador, foram obtidos através dos questionários dos alunos e professores, bem como na observação dos cadernos dos alunos e Manual da 9ª Classe.

Do inquérito aplicado aos professores, uma (50%) declarou que, para o cálculo da raiz quadrada, usava o método de factorização e o de tentativas e erros e a outra usava apenas o método de factorização.

Quando inquirido aos alunos que métodos os professores usam para o cálculo da raiz quadrada, 87 (64%) dos alunos afirmou que o professor usa o método de factorização e o método de tentativas e erros, ao passo que 49 (36%) dos alunos afirmou que o professor usa apenas o método de factorização.

Quando se observou nos seus cadernos, constatou-se que os professores, para o cálculo da raiz quadrada, no período regular, usavam os métodos de factorização e de tentativas e erros, ao passo que, no período nocturno, usavam apenas o método de factorização. Ainda na observação dos cadernos dos alunos, pôde-se perceber que, para o cálculo da raiz quadrada, os professores, em primeiro lugar, apresentavam a definição da raiz quadrada e, em seguida, partiam para um exemplo de como calcular a raiz quadrada, sem apresentar os procedimentos do método a utilizar. Desta forma, o que foi ensinado pelo professor ao aluno pode muito bem ser facilmente esquecido; daí que é pouco adequada esta forma de tratamento por parte dos professores.

O Manual da 9ª Classe faz menção à raiz quadrada, mas, em nenhum momento, apresenta os procedimentos para o cálculo da raiz quadrada, razão pela qual os professores, servindo-se do programa, optam, apenas, pela procura dos procedimentos eficazes para ensinar o cálculo da raiz quadrada, que, muitas vezes, não são eficazes para os alunos, fazendo com que muitos alunos apresentem fortes debilidades na assimilação deste importante conceito matemático.

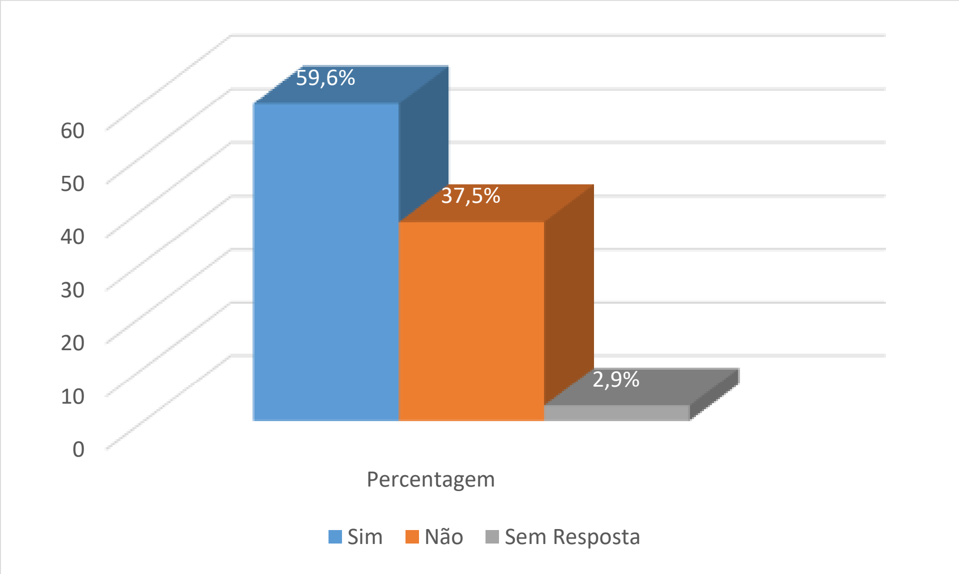
- Indicador: dificuldades dos alunos no cálculo da raiz quadrada.

Os resultados relativos a este indicador, foram analisados tendo em conta o inquérito aplicado aos alunos e aos professores.

Em relação ao inquerito aos alunos, os resultados são espelhados conforme o grafico a seguir:

Gráfico 1

Dificuldades no cálculo da raiz quadrada (opinião dos alunos)

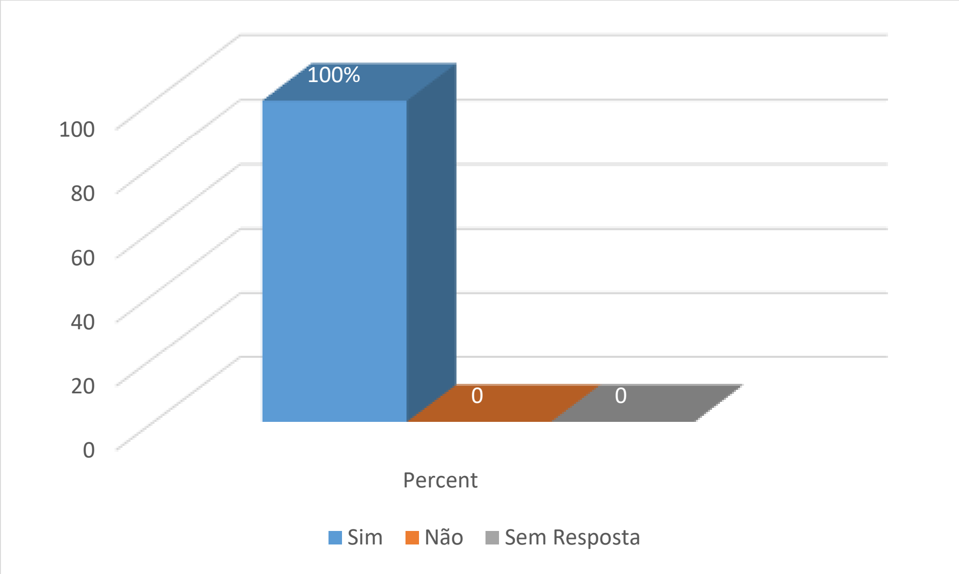


4 (2,9%) dos alunos não colocaram respostas, porém 81 (59,6%) afirmaram que tinham dificuldades no cálculo da raiz quadrada. Esta situação significa que a maioria dos alunos não aprendeu bem o cálculo da raiz quadrada, e acredita-se que é por vários factores, dentre os quais o facto de os professores, por um lado, apresentarem pouco domínio do conteúdo em estudo e, por outro, a falta de uma boa estratégia metodológica correspondente. Os 51 (37,5%) que alegaram não ter dificuldades, quando foram submetidos a teste para o cálculo da raiz quadrada no inquérito, não acertaram.

No inquérito dirigido aos professores, os resultados foram conforme indica o gráfico a seguir:

Gráfico 2

Dificuldades na aprendizagem do cálculo da raiz quadrada (opinião dos professores)



Ambas as professoras (100%) confirmaram que os alunos tinham dificuldades no cálculo da raiz quadrada. Uma das professoras justificou que muitos alunos apresentavam dificuldades no cálculo da raiz quadrada pelo facto de apresentarem debilidades na decomposição em factores primos, sendo este conteúdo o núcleo para o cálculo da raiz quadrada pelo método de factorização, ao passo que a outra professora afirmou que a grande dificuldade apresentada pelos alunos era o facto de não saberem fazer aproximações, o que dificulta o cálculo da raiz quadrada de raízes não exactas pelo método de tentativas e erros.

Disto, podemos dizer que, se os alunos apresentam dificuldades num determinado conteúdo matemático, a culpa pode recair, em parte, ao professor, por vários factores, dentre os quais o facto de não haver uma boa verificação das condições prévias dos alunos e a falta de motivação adequada por parte do professor durante a aula.

Conclui-se, então, que os alunos apresentam dificuldades no cálculo da raiz quadrada e que é necessário melhorar o ensino da Matemática sobre este conteúdo. Os alunos têm dificuldades no cálculo da raiz quadrada, pois as estratégias usadas pelos professores não são adequadas.

Dimensão dos pré-requisitos (professor e alunos)

- Indicador: ensino do cálculo da raiz quadrada.

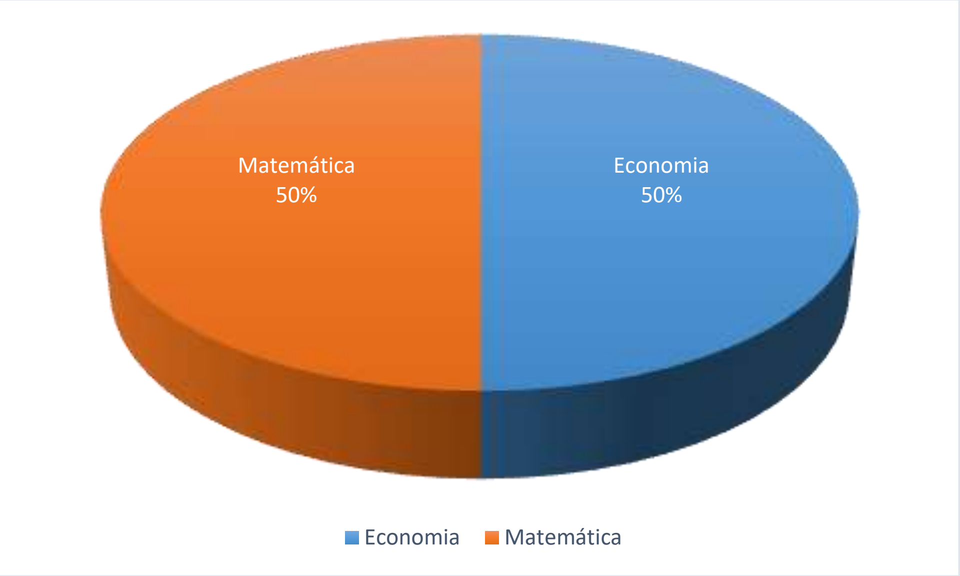
Em relação a este indicador, a partir do questionário aplicado aos professores, as 2 (100%) docentes afirmaram que têm leccionado este tema aos alunos da 9ª classe. Uma vez que este conteúdo não é o último no programa da 9ª classe (Anexo 1), então os professores não têm qualquer motivo para não leccionarem o cálculo da raiz quadrada, excepto se inventem algum motivo para colocar este tema no final do programa.

- Indicador: área de formação dos professores

Para este indicador, a partir do inquérito aplicado aos professores, obteve-se os dados conforme o gráfico a seguir:

Gráfico 3

Área de formação dos professores.



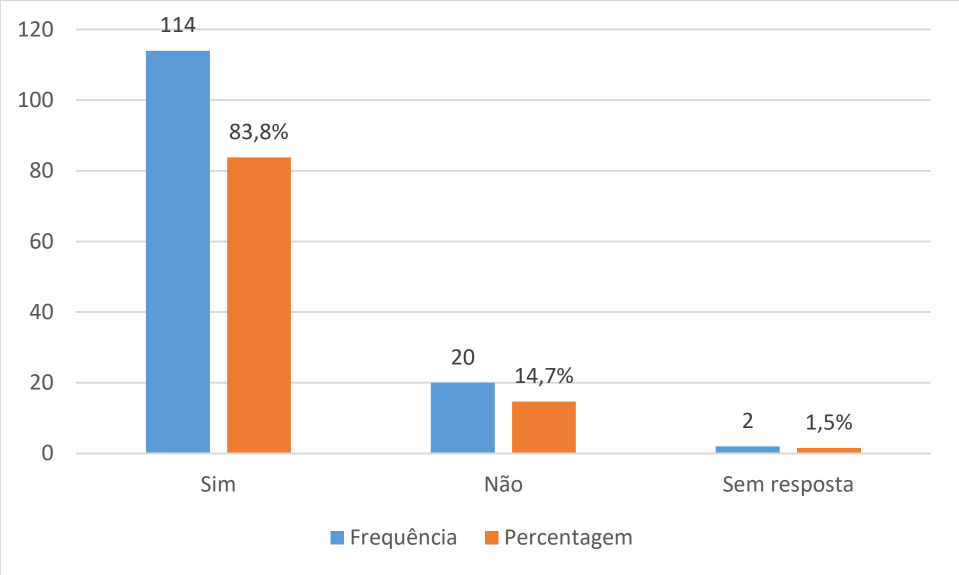
- Indicador: interesse dos alunos para a aprendizagem do cálculo da raiz quadrada.

Os dados relativos a este indicador podemos verificá-los a partir do inquérito aplicado aos alunos.

Em relação ao inquérito aplicado aos alunos, os resultados estão no gráfico a seguir:

Gráfico 4

Interesse dos alunos em aprender o cálculo da raiz quadrada



114 (83,8%) alunos mostraram interesse e motivação em aprender o cálculo da raiz quadrada. Os 20 (14,7%) alunos disseram “não”; se forem bem motivados, podem interessar-se em aprender o cálculo da raiz quadrada.

A análise dos dados permitiu constatar que urge a necessidade de uma abordagem bem detalhada e profunda sobre o cálculo da raiz quadrada nos manuais da classe, uma vez que não o apresenta, de modo a estabelecer-se uma consonância entre o programa e os manuais. Além disso, é fundamental que, ao se ministrar esse conteúdo, os professores tenham sempre em atenção os conhecimentos prévios dos alunos, tendo em conta os métodos empregues por cada professor, de modo a se conseguir uma aprendizagem significativa por parte dos alunos.

Dimensão Científica

- Indicador: habilidades para o cálculo da raiz quadrada.

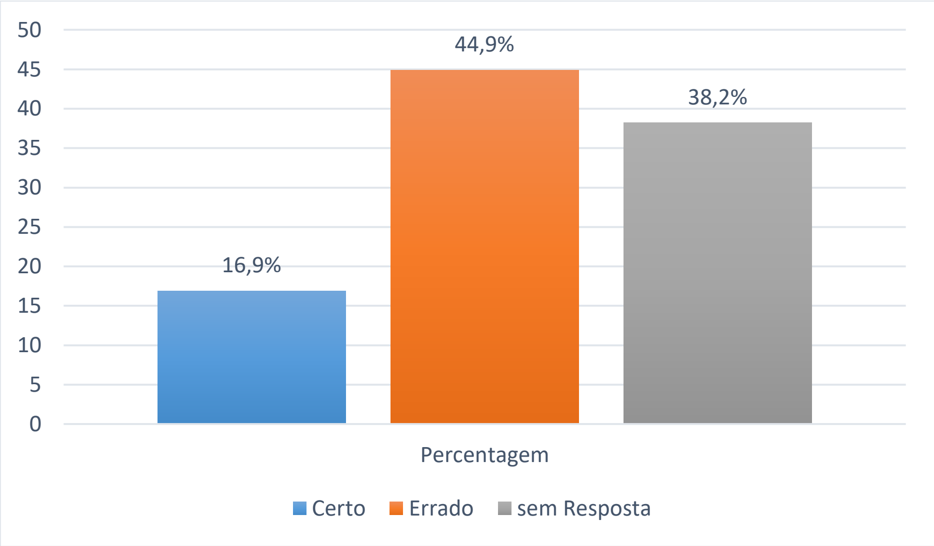
Para este indicador, verificou-se os resultados a partir do teste aplicado aos alunos.

O teste aplicado aos alunos era composto por apenas uma questão, com três alíneas, na qual os alunos tinham de resolver tendo em conta os conhecimentos aprendidos.

Para o teste 1a), os resultados são apresentados conforme indica o gráfico a seguir:

Gráfico 5

Habilidades dos alunos no cálculo da raiz quadrada (teste 1a)

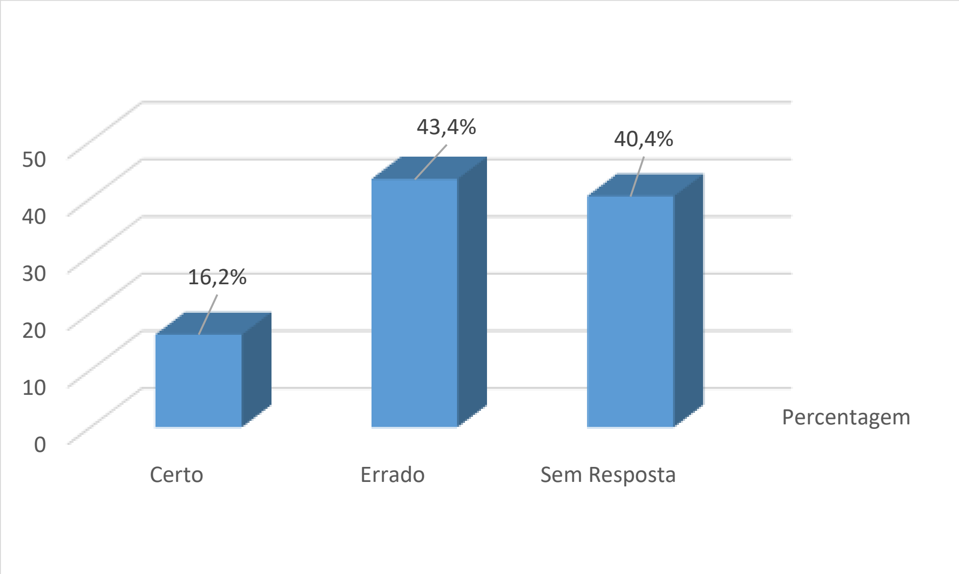


Percebe-se que 52 (38,2%) dos alunos ficou sem resolver o exercício, porém 61 (44,9%) dos alunos resolveu de forma errada e 23 (16,9%) acertou a resolução do exercício.

Relativamente ao teste 1b), o resultado é espelhado no gráfico a seguir:

Gráfico 6

Habilidades dos alunos no cálculo da raiz quadrada (teste 1b)

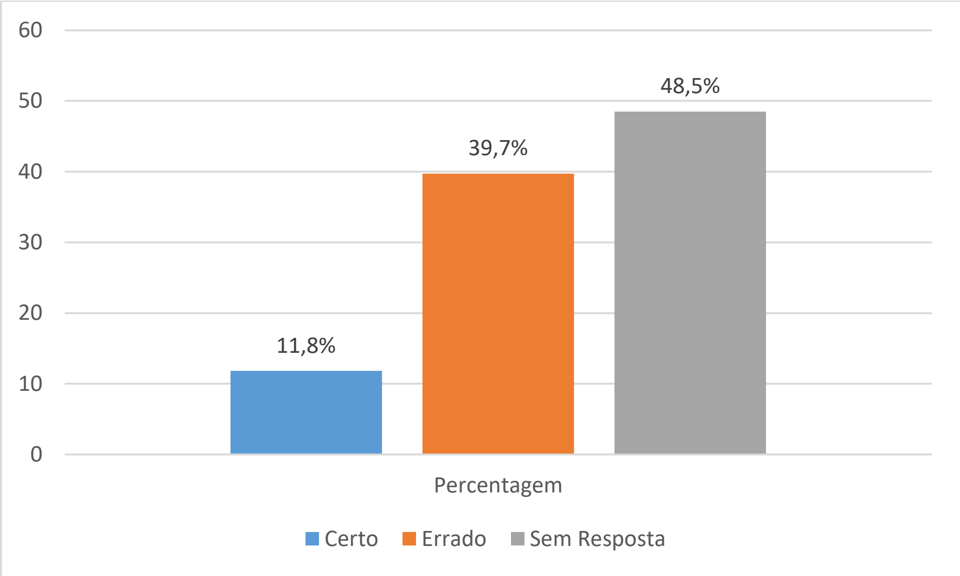


22 (16,2%) dos alunos acertou, ao passo que 59 (43,4%) dos alunos errou, o que mostra, claramente, que os alunos não desenvolveram habilidades suficientes para o cálculo da raiz quadrada. Outrossim, existe, de facto, debilidades nos alunos no cálculo da raiz quadrada, sendo urgente uma intervenção para o estudo deste conteúdo. 55 (40,4%) dos alunos não resolvou o exercício.

Quanto ao teste 1c), os resultados são espelhados no gráfico a seguir:

Gráfico 7

Habilidades dos alunos no cálculo da raiz quadrada (teste 1c)



16 (11,8%) dos alunos acertou, ao passo que 54 (39,7%) errou. 66 (40,4%) dos alunos não resolveu o exercício.

Estes resultados enfatizam os obstáculos e as dificuldades de conhecimento dos alunos em relação ao cálculo da raiz quadrada.

Considera-se a dimensão pedagógica como negativa, tendo em conta os seus indicadores, que se encontram na categoria de pouco adequada e não adequada.

2.2. Apresentação da Proposta de uma Alternativa Metodológica para o Cálculo da Raiz Quadrada na 9ª Classe

A partir dos resultados e do estado actual e dos referentes teóricos metodológicos assumidos no capítulo I, propõe-se, em seguida, uma proposta de alternativa metodológica para o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe.

A presente proposta de alternativa metodológica tem como ponto de partida e de chegada o método de Jonofon Sérates, que consiste na subtracção de uma sequência de números ímpares, enquadrando-se, deste modo, às características psicopedagógicas dos alunos da 9ª classe, uma vez que trabalharão com as operações de adição e subtracção, pois é tarefa do professor facilitar a aprendizagem do aluno.

2.2.1. Objectivos da proposta

Tendo em conta o tema, traçou-se os seguintes objectivos:

- Facilitar a abordagem do cálculo da raiz quadrada na 9ª classe;
- Melhorar o processo de ensino-aprendizagem do cálculo com radicais.

2.2.2. Características da proposta

Enfatizando os objectivos do trabalho, a presente proposta tem as seguintes particularidades:

1- Garante uma via alternativa para o cálculo da raiz quadrada;
2- Potencia as estratégias de resolução do cálculo da raiz quadrada;
3- Descreve os procedimentos algoritmos simples para o cálculo da raiz quadrada;
4- Promove aprendizagem significativa;

2.2.3. Requisitos da proposta

Para que se consiga resultados eficientes com a aplicação desta proposta, é necessário que os alunos tenham os seguintes conhecimentos prévios:

1- Conjuntos numéricos;
2- Números ímpares;
3- Propriedades de potências;
4- Propriedades dos radicais;
5- Domínio de duas operações elementares (adição e subtracção).

Em suma, cabe ao professor o papel de verificar se os alunos reúnem ou não estes requisitos, para que, no acto de abordagem do cálculo da raiz quadrada, ocorra uma participação activa e consciente dos alunos.

2.2.4. Apresentação da proposta

A aprendizagem é uma actividade que resulta na formação de novos conhecimentos e habilidades e na incorporação de novas qualidades às noções e capacidades que o aluno já possuía (Galperin ,2009). Assim, percebe-se que, para fortalecer o processo de ensino-aprendizagem, o professor deve pautar-se por acções que elevem as capacidades cognitivas dos alunos – acções estas tidas com uma adequada consideração sobre as capacidades de actividade mental dos alunos.

O professor deve saber, não apenas identificar as acções que se incluem nos diferentes tipos de actividades cognitivas, mas também conhecer a sua estrutura, os seus componentes, as suas partes funcionais, as suas características básicas e as etapas e regularidades da sua formação. Qualquer acção humana se dirige a algum objecto, podendo ser este um conceito ou um material externo. Como resultado de qualquer acção, obtém-se um produto final. Este objectivo final pode coincidir ou não com os objectivos traçados.

Assim, a proposta a ser apresentada está dividida em três etapas, cada uma com as suas actividades:

1ª Etapa (Fase de Introdução)

Nesta primeira etapa, temos a destacar dois pontos fundamentais que constituem o arcabouço desta fase: o asseguramento do nível de partida e a motivação.

- **Asseguramento do Nível de Partida (A.N.P.)**

Nesta fase, o professor procura fazer uma relação entre os objectivos que se pretende alcançar e os conhecimentos prévios dos alunos, mediante um teste diagnóstico e os requisitos da proposta definidos. O sucesso de qualquer ensino depende decisivamente das prévias condições que os alunos trazem; os alunos abarcam conhecimentos, habilidades, capacidades, atitudes e convicções que influenciam, de forma decisiva, no decurso e no resultado de ensino.

- **Motivação**

O objectivo fundamental da motivação é estimular o aluno, de forma a impulsioná-lo nos seus próprios interesses pelo conhecimento a ser adquirido. Assim, na motivação, o aluno cria uma contradição interna comparativa entre os conhecimentos anteriores adquiridos e o novo. A motivação é importante no processo de ensino e aprendizagem, pois impulsiona os alunos a se interessarem pelos conhecimentos que a eles se pretendem transmitir. Daí que, segundo Nolasco (2009), temos a destacar dois tipos de motivação: a extrínseca (quando o aluno é movido por estímulo externo, como merecimento de algum prémio por parte da família ou da sociedade em geral, elogio de professor ou de colega) e a intrínseca (quando o aluno manifesta amor pelos conhecimentos, principalmente quando alcança a solução de um problema difícil). A motivação intrínseca tem vantagem sobre a extrínseca, porque imprime, na estrutura mental do aluno, um espírito investigativo.

Actividade

- O professor apresenta um problema (exercício) para os alunos extraírem a raiz quadrada, tendo em conta os conhecimentos aprendidos nas aulas anteriores. Em seguida, questiona os alunos se apresentam conhecimentos da existência de um outro método para resolver o mesmo exercício, cuja finalidade é estabelecer alternativas para o cálculo da raiz quadrada.

2ª Etapa (Fase da Realização e Execução)

Esta etapa é de grande delicadeza para o professor, pois inspira muita atenção por parte do aluno na satisfação das expectativas do que espera do professor. Realiza-se tendo em conta duas funções didácticas:

- **Orientação até ao Objectivo (O.A.O.)**

Nesta fase, o professor orienta os alunos, tendo em conta os objectivos em foco, ou, ainda, tem o papel de orientar os alunos dentro dos objectivos pretendidos.

- **Tratamento da Nova Matéria** (**T.N.M.**)

O tempo significativo de uma aula é dedicado no cumprimento desta função didáctica, por ser a fase em que o aluno adquire novos conhecimentos importantes que o ajudam a reconhecer relações e desenvolver as suas habilidades e capacidades na utilização de procedimentos matemáticos. Assim, pretende-se abordar o cálculo da raiz quadrada pelo método de Jonofon Sérates.

3ª Etapa (Fase da Fixação e Controlo)

- **Fixação**

Na fixação, os alunos exercitam mais e aprofundam os seus conhecimentos, partilhando com os colegas de turma e com a ajuda do professor – "Aplicação, Sistematização e Revisão".

É um momento em que os alunos devem reter os conhecimentos e desenvolver capacidades e habilidades, para garantir uma aprendizagem significativa ao longo da sua formação.

- **Controlo**

O controlo é uma ferramenta que fornece ao professor e ao aluno informações sobre os resultados da sua actividade; no ponto de vista quantitativo e qualitativo, especificamente quanto ao saber e ao poder, capacidades e habilidades, educação ideológica, critérios e carácter, tendo em conta os objectivos plasmados nos programas.

Em todo o processo de ensino e aprendizagem, o controlo e a avaliação das aprendizagens têm os seguintes objectivos:

- ❖ Ajudar o professor a compreender o nível de assimilação dos novos conhecimentos e habilidades por parte dos alunos;
- ❖ Analisar os resultados das suas actividades, a adequação dos métodos e o grau de compreensão dos objectivos;
- ❖ Ajudar os alunos a consolidar e aperfeiçoar os novos conhecimentos adquiridos e relacioná-los com a sua vida prática.

2.3. Exemplo da Aplicação da Proposta

Uma aula deve sempre obedecer todas a fases didácticas, partindo da verificação dos conhecimentos prévios dos alunos (Asseguramento do Nível de Partida) até ao controlo ou avaliação dos conhecimentos aprendidos durante a aula. Este controlo fornecerá resultados de ensino ao professor e de aprendizagem ao aluno. Assim sendo, aplicando as etapas da proposta, temos:

<u>1ª Etapa (Fase da Introdução)</u>

Asseguramento do Nível de Partida

Método: elaboração conjunta

Rever os conhecimentos sobre:

- Conjuntos numéricos,
- Números ímpares;
- Domínio de duas operações elementares (adição e subtracção);
- Noção de potência.

Para que o professor tenha firmeza de que os alunos dominam os conteúdos já vistos nos níveis ou nas aulas anteriores, deve, na fase do asseguramento do nível de partida, seguir as seguintes referências:

- Dá exemplo de dois números para cada um dos seguintes conjuntos: naturais, inteiros, racionais e irracionais.

Resposta: 2 e 3, números naturais; -4 e 9, números inteiros; $\frac{1}{2}$ e $1{,}33333333...$, números racionais; $\sqrt{2}$ e $23{,}142567...$, números irracionais.

- Dê 5 exemplos de números ímpares.

Resposta: $1, 3, 5, 7, 9$

Nota: as respostas podem ser outras não consecutivas, como: $21, 43, 11, 97$.

- Como se pode subtrair os seguintes números?

a) $239-57$

Resposta:

$$\begin{array}{r} 239 \\ -57 \\ \hline 182 \end{array}$$

Logo: $239-57=182$

O aluno deve responder às questões feitas pelo professor sobre os conteúdos já estudados anteriormente e resolver, no quadro e com ajuda do professor, os exercícios expostos.

- ✓ **Objectivo do Asseguramento do Nível de Partida (A.N.P.)**

Criar condições de acomodação do cálculo da raiz quadrada nas estruturas cognitivas dos alunos, tendo em conta os pré-requisitos.

- ✓ **Papel do professor no Asseguramento do Nível de Partida**

Nesta fase, o professor tem um papel importante, pois somente o professor sabe o que o aluno precisa para dominar e aprender o conteúdo da nova aula, de maneira que haja ligação entre o que o aluno consegue fazer sozinho e o que pode fazer com ajuda do professor na aula nova. Assim, para cada um dos itens expostos anteriormente, o professor deve colocar, pelo menos, um exercício de cada, a fim de os alunos mostrarem o que têm aprendido sobre os conteúdos, e, em casos de insuficiências por parte do aluno, buscar resolver; o professor deve procurar esclarecer as possíveis dúvidas dos conhecimentos anteriores, pois precisa destes conhecimentos patentes na estrutura cognitiva dos alunos, para o sucesso da nova aula do cálculo da raiz quadrada.

- ✓ **Papel do aluno no asseguramento do nível de partida**

O aluno deverá responder às questões feitas pelo professor sobre os conteúdos já estudados e resolver os exercícios expostos, também, pelo professor. Um dos pontos fulcrais é que os alunos terão a oportunidade de satisfazer todas as dúvidas dos conteúdos a serem revistos pelo professor, dentre eles: os conjuntos numéricos, os números ímpares e as operações elementares (adição e subtracção). É um conteúdo pelo qual os alunos poderão interagir mais e melhor com o professor, visto que alguns conteúdos antecedentes não foram bem assimilados.

Motivação

Método: elaboração conjunta

- Dada a expressão $\sqrt{1225}$, além dos métodos estudados, existe uma outra forma para determinar a sua raiz quadrada?

- ✓ **Objectivos da função didáctica “Motivação”**

Despertar no aluno a vontade de aprender o cálculo da raiz quadrada, tendo em conta um novo método.

- ✓ **Papel do professor na motivação**

Segundo Jamba (2019), a motivação extrínseca desperta a motivação intrínseca; desta forma, a acção do professor fará com que o aluno desperte interesse e vontade ou desejo de vencer. De acordo a pergunta feita acima, na motivação, os alunos são levados a uma contradição interna entre as possibilidades subjectivas e as necessidades objectivas.

- ✓ **Papel do aluno na motivação**

Os alunos vão buscar responder a esta situação e, principalmente, buscar descobrir e reflectir sobre a existência de uma nova forma de se extrair a raiz quadrada de um número real positivo, diferentemente das vias por eles aprendidas nas aulas anteriores. Depois de o professor afirmar que existe outro método para o cálculo da raiz quadrada, isto irá despertar nos alunos a curiosidade e o interesse em aprender este novo método para o cálculo da raiz quadrada, o que prenderá a sua atenção à nova aula.

<u>2ª Etapa (Fase da realização e execução)</u>

Orientação até ao objectivo
Método: expositivo

Nesta fase, o professor dirá o que será tratado durante a aula, com base na situação apresentada na fase anterior.
“Hoje, vamos falar do cálculo da raiz quadrada, usando o método de Jonofon Sérates, ou seja, um método diferente dos que já aprenderam. As suas vantagens consistem no facto de que trabalharemos apenas com as operações de adição e subtracção e os conhecimentos dos números ímpares.”

Sendo assim, o professor escreverá o assunto no quadro e, por sua vez, os alunos escrevê-lo-ão nos seus cadernos.

Tratamento da Nova Matéria (T.N.M.)

Tema: Cálculo da Raiz Quadrada pelo Método de Jonofon Sérates

Métodos: expositivo e elaboração conjunta.

Objectivo específico: calcular a raiz quadrada de um número real positivo pelo método de Jonofon Sérates.

- Papel do professor no T.N.M.: expõe os procedimentos de extracção da raiz quadrada usando o método de Jonofon Sérates e os seus respectivos exemplos.
- Papel do aluno no T.N.M.: tomar nota dos procedimentos para o cálculo da raiz quadrada usando o método de Jonofon Sérates, interagindo com o professor durante a estimação dos possíveis valores da raiz quadrada.

Nesta fase, temos a destacar duas actividades do professor:

Actividade 1:

O professor apresenta os procedimentos para o cálculo da raiz quadrada exacta usando o método de Jonofon Sérates, da seguinte forma:

- Para o cálculo da raiz quadrada exacta usando o método de Jonofon Sérates, segue-se os seguintes procedimentos:

1- Separar os algarismos de dois em dois, da direita para a esquerda;
2- Efectuar a subtracção sucessiva de números ímpares do primeiro bloco da esquerda, até que não seja possível no conjunto dos números naturais;
3- Efectuar a contagem da quantidade de subtracções realizadas no primeiro bloco, dando, desse modo, o primeiro algarismo da raiz procurada;
4- Baixar, imediatamente, o bloco seguinte (caso haja) e juntá-lo ao resto da subtracção anterior;
5- Colocar o número 1 abaixo das unidades do número formado (resto formado) e somar o último ímpar que aparecer entre as subtracções com 1, colocando o resultado ao lado esquerdo do número 1, e reiniciar as subtracções com números ímpares;
6- Determinar a raiz quadrada do número real dado.

Exemplo 1:

- Determinar $\sqrt{25}$.

Efectuando o cálculo da raiz quadrada usando o método de Jonofon Sérates, temos:

Como vimos, o número dado possui somente dois algarismos, então, basta efectuarmos a subtracção sucessiva de números ímpares até que não seja possível no conjunto dos números naturais:

$25-1=24$

$24-3=21$

$21-5=16$

$16-7=9$

$9-9=0$

Assim, chegamos a 0. Como fazemos ao todo 5 subtracções, então, $\sqrt{25}=5$.

Exemplo 2: Calcular $\sqrt{1225}$

1º Passo: separar os algarismos de dois em dois, da direita para a esquerda.

$\sqrt{12'25}$

2º Passo: efectuar a subtracção pela sequência de números ímpares do número mais à esquerda, até que a subtracção não seja mais possível no conjunto dos números naturais.

$$\begin{array}{r} \sqrt{12'25} \\ -1 \\ \hline 11 \\ -3 \\ \hline 8 \\ -5 \\ \hline 3 \end{array}$$

3º Passo: a quantidade de subtracções realizadas é o número do primeiro algarismo da raiz quadrada procurada.

$$\sqrt{12'25} = 3$$
$$\begin{array}{r} -1 \\ \hline 11 \\ -3 \\ \hline 8 \\ -5 \\ \hline 3 \end{array}$$

4º Passo: baixar o bloco seguinte imediatamente à direita, e juntamo-lo ao resto das subtracções anteriores.

$$\sqrt{12'25} = 3$$
$$\begin{array}{r} -1 \\ \hline 11 \\ -3 \\ \hline 8 \\ -5 \\ \hline 325 \end{array}$$

5º Passo: colocar o número 1 abaixo das unidades do número 325 e somar o último ímpar que apareceu entre as subtrações com valor 1, colocando o resultado ao lado esquerdo do número 1 no resto. Ou seja, fica 5 (o último ímpar que foi subtraído) $+1$ (fixo) = 6. Colocar esse valor ao lado do algarismo 1, formando 61, para reiniciar a subtracção.

$\sqrt{12'25} = 3$

-1

11

-3

8

-5

325

-61

264

-63

201

-65

136

-67

69

-69

0

6º Passo: a quantidade de subtracções realizadas é o segundo algarismo da raiz.

$\sqrt{12'25} = 35$

-1

11

-3

8

-5

325

-61

264

-63

201

-65

136

-67

69

-69

0

Neste caso, como o resto das subtracções foi zero, temos uma raiz exacta. Assim, podemos concluir que $\sqrt{1225} = 35$.

Exemplo 3: Determinar $\sqrt{0{,}16}$

Em primeiro lugar, transformemos o radicando em fracção e, em seguida, apliquemos a propriedade dos radicais, tendo:

$$\sqrt{0{,}16} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}$$

Agora, basta calcular, separadamente, as raízes quadradas de 49 e 100, tendo:

$\sqrt{16}$

Como o radicando tem apenas dois algarismos, vamos efectuar apenas a subtracção sucessiva de números ímpares, até que não seja possível no conjunto dos números naturais.

$16 - 1 = 15$

$15 - 3 = 12$

$12 - 5 = 7$

$7 - 7 = 0$

Como o resto foi zero, então, estamos diante de uma raiz exacta. Como fizemos, ao todo, 4 subtrações, logo: $\sqrt{16} = 4$

Em seguida, determinamos a raiz quadrada de 100.

$\sqrt{100}$

1º Passo: separar os algarismos de dois em dois, da direita para a esquerda;

$\sqrt{1'00}$

2º Passo: efectuar a subtracção pela sequência de números ímpares do número mais à esquerda, até que a subtracção não seja mais possível no conjunto dos números naturais.

$$\begin{array}{l} \sqrt{1'00} \\ -1 \\ \hline \;\;0 \end{array}$$

3º Passo: a quantidade de subtracções realizadas é o número do primeiro algarismo da raiz quadrada procurada.

$$\begin{array}{l} \sqrt{1'00} = 1 \\ -1 \\ \hline \;\;0 \end{array}$$

4º Passo: baixar o bloco seguinte imediatamente à direita, e juntamo-lo ao resto da subtracção anterior.

$$\begin{array}{l} \sqrt{1'00} = 1 \\ -1 \\ \hline \;\;000 \end{array}$$

5º Passo: colocar o número 1 abaixo do número 000 (zero) e somar o último ímpar que apareceu entre as subtracções com valor 1, colocando o resultado ao lado esquerdo do número 1 no resto. Ou seja, fica 1 (o último ímpar que foi subtraído) $+1$ (fixo) = 2; colocar esse valor ao lado do algarismo 1, formando 21, para reiniciar a subtracção. Como o valor do diminuendo é menor que o do subtraindo, então, não efectuaremos a subtracção. Por não ter sido feita a subtracção, logo, o próximo algarismo da raiz é 0.

$$\begin{array}{l} \sqrt{1'00} = 10 \\ -1 \\ \hline \;\;000 \\ \;\;-21 \\ \hline \end{array}$$

Logo, temos que: $\sqrt{100} = 10$.

Assim, teremos: $\sqrt{0{,}16} = \sqrt{\dfrac{16}{100}} = \dfrac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.

Actividade 2:

Procedimentos para o cálculo de raízes não exactas, usando o método de Jonofon Sérates:

1- Separar os algarismos de dois em dois, da direita para a esquerda;
2- Efectuar a subtracção sucessiva de números ímpares do primeiro bloco da esquerda, até que não seja possível no conjunto dos números naturais;
3- Efectuar a contagem da quantidade de subtracções realizadas no primeiro bloco, dando, desse modo, o primeiro algarismo da raiz procurada;
4- Baixar, imediatamente, o bloco seguinte (caso haja) e juntá-lo ao resto da subtracção anterior.
   - Caso não haja um novo bloco, acrescentamos dois zeros ao resto da subtracção anterior e colocamos uma vírgula após o primeiro algarismo da raiz;
5- Colocar o número 1 abaixo das unidades do número formado (resto formado) e somar o último ímpar que aparecer entre as subtracções com 1, colocando o resultado ao lado esquerdo do número 1, e reiniciar a subtracção de números ímpares;
6- Determinar a raiz quadrada do número real dado, tendo em conta o número de casas decimais desejadas.

Exemplo 1: Determinar $\sqrt{2}$.

1º Passo: como o número dado apresenta apenas um algarismo, efectuamos directamente a subtracção de números ímpares, ficando:

$$\begin{array}{r} \sqrt{2} \\ -1 \\ \hline 1 \end{array}$$

2º Passo: a quantidade de subtracções realizadas é o primeiro algarismo da raiz procurada.

$$\begin{array}{rl} \sqrt{2} & = 1 \\ -1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

3º Passo: acrescentamos dois zeros ao resto 1, formando 100, e uma vírgula após o 1, primeiro algarismo da raiz.

$$\begin{array}{l} \sqrt{2} = 1, \\ \underline{-1} \\ \quad 100 \end{array}$$

4º Passo: colocar o número 1 abaixo das unidades do número 100 e somar o último ímpar que aparecer entre as subtrações com valor 1, colocando o resultado ao lado esquerdo do número 1 no resto. Ou seja, fica 1 (o último ímpar que foi subtraído) $+1$ (fixo) = 2; colocar esse valor ao lado do algarismo 1, formando 21, para reiniciar a subtracção.

$$\begin{array}{r} \sqrt{2} = 1, \\ \underline{-1\quad} \\ 100 \\ \underline{-21} \\ 79 \\ \underline{-23} \\ 56 \\ \underline{-25} \\ 31 \\ \underline{-27} \\ 4 \end{array}$$

5º Passo: a quantidade de subtracção é o próximo algarismo decimal da raiz.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{2} = 1{,}4 \\
-1 \\
\hline
\quad 100 \\
\quad -21 \\
\hline
\quad 79 \\
\quad -23 \\
\hline
\quad 56 \\
\quad -25 \\
\hline
\quad 31 \\
\quad -27 \\
\hline
\quad 4
\end{array}
$$

6º Passo: acrescentamos dois zeros ao resto 4, formando 400.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{2} = 1{,}4 \\
-1 \\
\hline
\quad 100 \\
\quad -21 \\
\hline
\quad 79 \\
\quad -23 \\
\hline
\quad 56 \\
\quad -25 \\
\hline
\quad 31 \\
\quad -27 \\
\hline
\quad 400
\end{array}
$$

7º Passo: colocar o número 1 abaixo das unidades do número 400 e somar o último ímpar que aparecer entre as subtracções com valor 1, colocando o resultado ao lado esquerdo do número 1 no resto. Ou seja, fica 27 (o último ímpar que foi subtraído) $+1$ (fixo) = 28; colocar esse valor ao lado do algarismo 1, formando 281, para reiniciar a subtracção

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{2} = 1{,}4 \\
-1 \\
\hline
\quad 100 \\
\quad -21 \\
\hline
\quad\ 79 \\
\quad -23 \\
\hline
\quad\ 56 \\
\quad -25 \\
\hline
\quad\ 31 \\
\quad -27 \\
\hline
\quad\ 400 \\
\quad -281 \\
\hline
\quad\ 181
\end{array}
$$

8º Passo: a quantidade de subtracções é o próximo algarismo; logo, tem-se:

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{2} = 1{,}41 \\
-1 \\
\hline
\quad 100 \\
\quad -21 \\
\hline
\quad\ 79 \\
\quad -23 \\
\hline
\quad\ 56 \\
\quad -25 \\
\hline
\quad\ 31 \\
\quad -27 \\
\hline
\quad\ 400 \\
\quad -281 \\
\hline
\quad\ 181
\end{array}
$$

9º Passo: acrescentamos dois zeros ao resto 181, formando 18100 .

$$
\begin{array}{r}
\sqrt{2} = 1{,}41 \\
-1 \\
\hline
100 \\
-21 \\
\hline
79 \\
-23 \\
\hline
56 \\
-25 \\
\hline
31 \\
-27 \\
\hline
400 \\
-281 \\
\hline
18100
\end{array}
$$

10º Passo: colocar o número 1 abaixo das unidades do número 18100 e somar o último ímpar que aparecer entre as subtracções com valor 1, colocando o resultado ao lado esquerdo do número 1 no resto. Ou seja, fica 281 (o último ímpar que foi subtraído) $+1$(fixo) = 282; colocar esse valor ao lado do algarismo 1, formando 2821, para reiniciar a subtracção.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{2}=1{,}41 \\
\underline{-1} \\
\quad 100 \\
\underline{-21} \\
\quad 79 \\
\underline{-23} \\
\quad 56 \\
\underline{-25} \\
\quad 31 \\
\underline{-27} \\
\quad 400 \\
\underline{-281} \\
\quad 18100 \\
\underline{-2821} \\
\quad 9079 \\
\underline{-2823} \\
\quad 6256 \\
\underline{-2825} \\
\quad 3431 \\
\underline{-2827} \\
\quad 604
\end{array}
$$

11º Passo: a quantidade de subtracções é o próximo algarismo da raiz.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{2} = 1{,}414 \\
-1 \\
\hline
\quad 100 \\
\ -21 \\
\hline
\quad 79 \\
\ -23 \\
\hline
\quad 56 \\
\ -25 \\
\hline
\quad 31 \\
\ -27 \\
\hline
\quad 400 \\
\ -281 \\
\hline
\quad 18100 \\
\ -2821 \\
\hline
\quad 9079 \\
\ -2823 \\
\hline
\quad 6256 \\
\ -2825 \\
\hline
\quad 3431 \\
\ -2827 \\
\hline
\quad 604
\end{array}
$$

Nota: para extrairmos a raiz quadrada de irracionais ou não exactas, procedemos, exactamente, seguindo os passos acima mencionados, completando com dois zeros e os associados as casas decimais.

A grande percepção desse método é a associação com a soma da sequência dos números ímpares menores que o valor da raiz procurada, que resulta num número quadrado, o que facilita a extracção de raízes.

3ª Etapa (Fase da Fixação e Controle)

Fixação

Este é o momento em que os alunos desenvolvem as suas capacidades habilidades, tendo em conta os conhecimentos aprendidos durante a fase anterior.

- Papel do professor: apresentar exercícios sobre o cálculo da raiz quadrada;
- Papel do aluno: resolver os exercícios, tendo em conta os conhecimentos aprendidos.

Os exercícios propostos para os alunos, nesta fase, são os seguintes:

1- Determinar a raiz quadrada dos números a seguir pelo método de Jonofon Sérates:

   a) $\sqrt{676}$

   b) $\sqrt{5}$

As respostas que os alunos devem apresentar sob a orientação do professor (elaboração conjunta).

Sob a supervisão do professor, o aluno deverá seguir os procedimentos aprendidos, a fim de dar solução aos exercícios.

Para o exercício 1 a), o aluno terá de aplicar os procedimentos para o cálculo da raiz quadrada exacta aprendidos na actividade 1.

$$\sqrt{6'76} = 26$$
$$\begin{array}{r} -1 \\ \hline 5 \\ -3 \\ \hline 276 \\ -41 \\ \hline 235 \\ -43 \\ \hline 192 \\ -45 \\ \hline 147 \\ -47 \\ \hline 100 \\ -49 \\ \hline 51 \\ -51 \\ \hline 0 \end{array}$$

Logo, temos $\sqrt{676} = 26$, porque $26 \times 26 = 676$.

Para o exercício 1b), o aluno deverá proceder seguindo os procedimentos para o cálculo da raiz quadrada não exacta aprendidos na actividade 2.

$$\sqrt{5} = 2{,}23...$$
$$\begin{array}{r} -1 \\ \hline 4 \\ -3 \\ \hline 100 \\ -41 \\ \hline 59 \\ -43 \\ \hline 1600 \\ -441 \\ \hline 1159 \\ -443 \\ \hline 716 \\ -445 \\ \hline 271 \end{array}$$

Controlo

Exercícios propostos para o trabalho independente do aluno:

1- Determinar a raiz quadrada dos seguintes números:

a) $\sqrt{1024}$

b) $\sqrt{10}$

2- O Pai do António comprou uma folha de zinco de forma quadrada. Esta tem $49\,m^2$ de área. Quantos metros mede cada lado da folha de zinco?

2.4. Justificativa do Método

Por meio deste método, percebe-se que podemos escrever qualquer número quadrado perfeito como a soma dos n primeiros números naturais ímpares menores que o valor de que se quer encontrar a raiz quadrada.

Ou seja:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + 3 = 4$$

$$a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$a_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$\vdots$$

$$k = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + a_n$$

Assim, percebe-se, facilmente, que o 2^{o} membro da última equação é a soma dos termos de uma progressão aritmética, onde $a_1 = 1$ e a razão $r = 2$, sendo o termo geral da progressão:

$$a_1 = a_1 + (n-1).r$$

$$a_n = 1 + (n-1).2$$

$$a_n = 2n - 1$$

E a soma dada por:

$$k = \frac{(a_1 + a_n).n}{2}$$

$$k = \frac{(a_1 + 2n - 1).n}{2}$$

$$k = n^2$$

$$n = \sqrt{k}$$

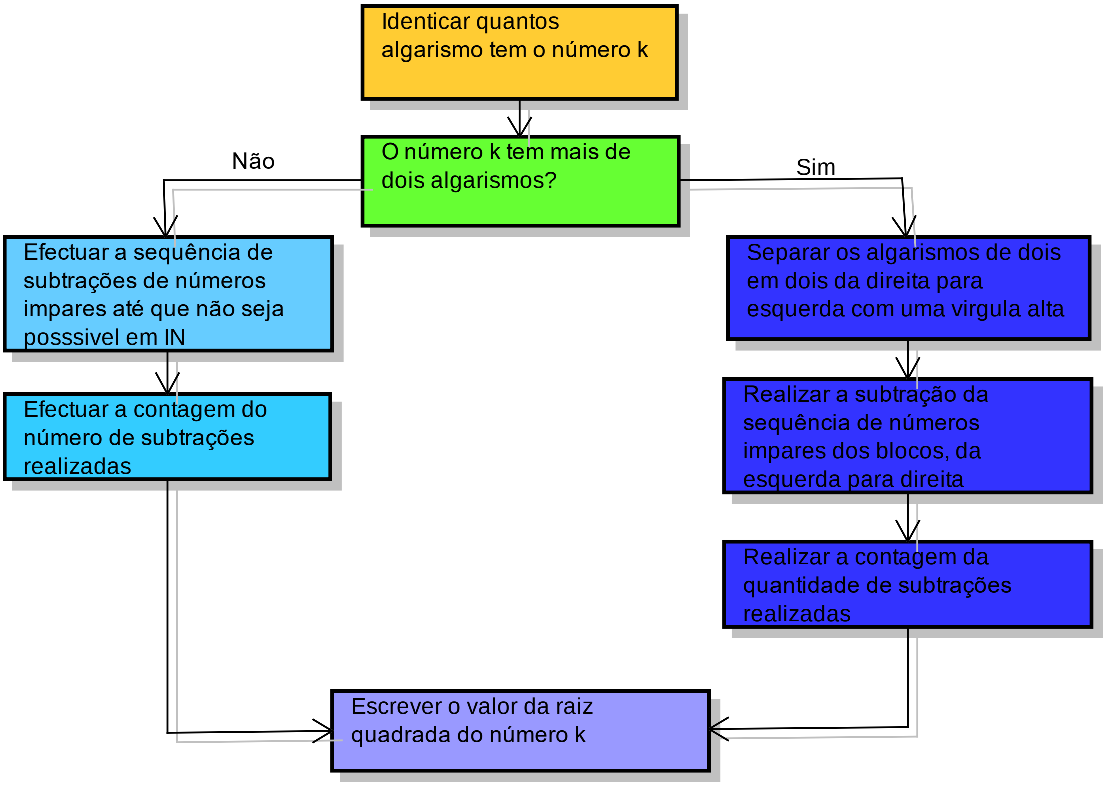
O valor de n é o número de parcelas da soma de uma progressão aritmética.

2.5. Esquema da Proposta

Tomando o símbolo $\sqrt{k}$, com $(k \geq 0)$, para determinar a raiz quadrada do número k, segue-se o seguinte esquema:

Figura 4

Fluxograma para o cálculo da raiz quadrada



2.6. Análise da Proposta pelos Especialistas

Para a validação da proposta apresentada, aplicou-se um questionário de consulta aos especialistas, com a finalidade de apresentarem as suas opiniões sobre a proposta de alternativa metodológica para o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe no Complexo Escolar 116 “Imaculada Conceição” – Lubango.

Considerou-se uma amostra de 9 especialistas, sendo 5 (55,6%) especialistas em Ensino da Matemática, 2 (22,2%) em Matemática e Aplicações, 1 (11,1%) em Supervisão Pedagógica e Formação de Formadores e 1 (11,1%) em Economia. Dois (2) (22,2%) especialistas são mestres em Matemática e Aplicações, 3 (33,4%) são mestres em Ensino da Matemática, 2 (22,2%) são licenciados em Ensino da Matemática, 1 (11,1%) é mestre em Supervisão Pedagógica e Formação de Formadores e 1 (11,1%) é licenciado em Economia.

Relativamente aos anos de experiência, 5 (55,6%) têm entre 10 e 20 anos de experiência, 2 (22,2%) têm entre 20 e 30 anos de experiência e 2 (22,2%) têm entre 30 e 40 anos de experiência.

Dos 9 especialistas questionados, 2 (22,2%) são professores universitários, 2 (22,2%) são professores do I Ciclo do Ensino Secundário e 5 (55,6%) são professores do II Ciclo do Ensino Secundário.

Conforme o questionário aplicado aos especialistas (Apêndice 9), considera-se que a proposta apresentada foi validada, conforme o resumo a seguir:

Tabela 1

Resultado do questionário de consulta aos especialistas

Questões	MA	BA	A	PA	NA	Total
1	5	3	1	0	0	9
2	2	6	1	0	0	9
3	3	4	2	0	0	9
4	4	3	2	0	0	9
5	4	3	2	0	0	9

6	6	3	0	0	0	9
7	3	5	1	0	0	9

Os aspectos da proposta foram considerados de muito adequado, bastante adequado e adequado. Na primeira questão, procurou-se saber, a partir dos especialistas, como avaliam a estrutura da proposta para o alcance dos objetivos, e obteve-se os seguintes resultados: 5 (55,6%) especialistas consideram a proposta muito adequada, 3 (33,3%) consideraram bastante adequada e 1 (11,1%) considera adequado.

Na segunda questão, procurou-se saber como avaliavam o conteúdo da proposta, e obteve-se os seguintes resultados: 2 (22,2%) especialistas consideram muito adequado, 6 (66,7) consideraram bastante adequado e 1 (11,1) considera adequado. O especialista que considerou adequado justificou-se dizendo que achava que o referido tema não fazia parte do programa da 9ª classe, que é novo para muitos, tendo em conta a actualização do programa da 9ª Classe.

Na terceira questão, procurou-se saber como avaliavam a coerência da actividade proposta, e obteve-se as seguintes respostas: 3 (33,3%) especialistas consideram muito adequado, 4 (44,4%) consideram bastante adequado e 2 (22,2%) consideram adequado.

Na quarta questão, procurou-se saber como avaliavam a aplicabilidade da proposta, e obteve-se as seguintes respostas: 4 (44,4%) especialistas consideram muito adequado, 3 (33,3) consideram bastante adequado e 2 (22,2%) consideram adequado. Um dos dois que afirmaram adequado justificou-se dizendo que, na fixação, se deveria diversificar os tipos de questão, devendo existir um problema do dia-a-dia do aluno e outras de associações. Certamente, vamos ter este aspecto em consideração. O outro especialista afirmou que se deveria enquadrar a proposta numa aula.

Na quinta questão, procurou-se saber como avaliavam o procedimento de cálculo da raiz quadrada, e obteve-se os seguintes resultados: 4 (44,4%)

especialistas consideram muito adequado, 3 (33,3%) consideram bastante adequado e 2 (22,2%) consideram bastante adequado.

Na sexta questão, procurou-se saber como avalia avaliavam a possibilidade de a proposta contribuir para o ensino do cálculo da raiz quadrada, e obteve-se os seguintes resultados: 6 (66,7%) especialistas consideram muito adequado e 3 (33,3%) consideram bastante adequado.

Na sétima questão, procurou-se saber como avaliavam o grau de actualidade da investigação, e obteve-se os seguintes resultados: 3 (33,3%) especialistas consideram muito adequado, 5 (55,6%) consideram bastante adequado e 1 (11,1%) considera adequado.

Conclusão do Capítulo II

1. Do diagnóstico feito, as estratégias que os professores usam para o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe não são adequadas.
2. Os professores devem prender a sua atenção na revisão dos conhecimentos prévios dos alunos, para permitir possibilitar o alcance dos objectivos durante a aula.
3. A proposta metodológica apresentada pode ajudar os alunos no cálculo da raiz quadrada, servindo de alternativa e alargando o leque de conhecimento do aluno, em consonância com os métodos habituais.

CONCLUSÕES GERAIS E RECOMENDAÇÕES

Conclusões Gerais

Com a realização do presente trabalho, deduziram-se as seguintes conclusões:

1. Os professores devem possuir conhecimentos psicopedagógicos necessários que permitam identificar as dificuldades e as particularidades de aprendizagem de cada aluno;
2. Os professores devem dirigir e estimular o processo de ensino em função da aprendizagem do aluno, isto é, pautar-se por um conjunto de acções, passos, condições externas e procedimentos para que todos os alunos compreendam, e, deste modo, contribuir para a riqueza intelectual do aluno;
3. O teste aplicado aos alunos revelou que estes apresentam fortes debilidades no cálculo da raiz quadrada;
4. A caracterização do estado actual do cálculo da raiz quadrada revelou insuficiências, visto que:
    - Os professores não exploram outros métodos para o cálculo da raiz quadrada, de modo a dar possibilidades de escolha aos alunos;
    - Entre as insuficiências, se destaca o fraco domínio dos conceitos e procedimentos relativos ao cálculo da raiz quadrada por parte dos alunos;
5. Há necessidade de se abordar o cálculo da raiz quadrada nos manuais da 9ª classe;
6. A proposta apresentada ao longo do trabalho garante um tratamento alternativo para o cálculo da raiz quadrada;
7. A proposta descrita neste trabalho mostrou-se ser adequada e pertinente, segundo a validação dos especialistas.

Recomendações

1. Aplicar, experimentalmente, a proposta metodológica, para se avaliar, na prática, o seu efeito sobre a aprendizagem dos alunos;
2. Fazer registo de tudo que ocorrer durante a aplicação desta proposta na prática, a fim de se possibilitar uma avaliação permanente;
3. Colocar a proposta de alternativa metodológica para o cálculo da raiz quadrada à disposição dos professores que leccionam a 9ª classe, a fim de minimizar as dificuldades no processo de ensino.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referências Bibliográficas

1.André, J.D., & Nascimento, I. (2018). Manual de Matemática 9ª Classe, Luanda, Angola.

2. Almeida, A., Lopes, E. d., Camilo, J. T., & Choi, V. P. (2016). *Manual APA: regras gerais de estilo e formação de trabalhos acadêmicos.* São Paulo.

3.Barbosa, M. C. (2019). *Metodologia Alternativa no Processo de ensino e Aprendizagem da Matemática: Um estudo nas escolas de Tempo Integral.* Arapirac, Brasil.

4.Bittar, M.A. (2017). Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. Zetetké, Campinas v.25,n.3,p.364-387.

5.Brandão, J. D. (2013). *O Papel do Livro Didático no Processo de Ensino Apredizagem: Uma introdução do Conceito de Função.* Paraiba, Campina Grande, Brasil.

6.Carvalho, J. B. (18-22 de Outubro de 2010). A Raiz quadrada ao longo dos séculos.

7.Cahamba, B. A (2014). Proposta Metodológica para o tratamento do cáculo Diferencial na 12ª classeno curso de Ciências Físicas e Biológicas através da utilização software geogébra.

8.Canastra, F., Haanstra, F., & Vilanculos, M. (2015). *Manual de Investigação Científica.* Rio Janeiro, Brasil: Universidade Católica de Moçambique.

9.Correia, A. P. (Realizador). (2016). *Raiz quadrada Exacta de um número Natural* [Filme]. https://www.youtube.com/watch?v=SRQQ5P65F20.

10.Calculadora.Tamanho da amostra, (s.d). SurveyMonkey. disponivel em https://pt.surveymonkey.com/mp/sample-size-calculator/.

11.Eves, H. (2004). *Introdução a Historia da Matemática. Tradução Hygino Domingues.*

12.Ferrari, F., & Cechinel, C. (n.d.). *Introdução a Algoritmos e Programação.* Obtido de https://www.ferrari.pro.br/home/documents/FFerrari-CCechinel-Introdução-a-algoritmos.pdf

13.Galperin, P. Y. (2009). *La dirección del proceso de aprendizaje: Las funciones psicológicas en el desarrollo del ninõ.* México: Trillas .

14.Grisi & Borba, M., (n.d). *Métodos de amostragem "Cálculo do tamanho de amostra".* Faculdade de Medicina Veterinária e Zootecnia da Universidade de São Paulo

15.Jamba, A. M. (2019). *Divisão de números Decimais- Proposta de uam Estratégia Metodológica para o Ensino na 5ª classe.* ISCED- Huíla, Lubango, Angola.

16.Joseph, G. G. (1992). *The crest of peacock: Non-European root of Mathematics.* New York, New York, Estados Unidos da America.

17.Junior, E. L. (2018). *Abordagens do algoritmo da raiz quadrada lidas nos livros didáticos no Brasil: Final so século XIX e na primeira dácada do século XX.* Florianápolis, Brasil.

18.Junior, E. L. (2018). *Algoritmo da raiz quadrada lidas nos livros didáticos no Brasil: Final do século XIX e na primeira década do século XX.* Florianópolis, Brasil.

19.Kambinda, E. B. (2018). *Proposta Metodológica Para a Multiplicação de Polinómios Usando Dispositvo Prático na 10ª Classe , no Instituto Técnico de Formação De Saúde Da Huíla-Lubango.* Lubango, Angola.

20.Libâneo, J. C. (2006). *Didática.* São Paulo, Brasil: Cortez Editora.

21.Lima, M. V. (2013). *Uma contribuição ao Ensino do Cálculo de Raízes Quadradas e Cúbicas.* Campina, Brasil: Profmat.

22.Lopes, C .(2020). Como fazer citações de referências: Guia prático da Norma Apa (2020, 7ª Edição).Lisboa.

23.Mangas, E. J. (2015). *Fasciculo de Física 9ª Classe.* Lubango.

24. Maria, G. H. (2017). *Proposta Metodológica para a resolução de problemas que conduzem a equações exponenciais na 10ª classe da escola o II cíclo do ensino secundário", no instituto médio de economia "IMElub" no Lubango.* ISCED-Huíla, Lubango, Angola.

25.Martins, V., Chirindza, D., & Cuamba, H. (2018). *Manual de Psicopedagogia : formação de professores do ensino primárioe educação de adultos* (Associação Progresso ed.). Maputo, Moçambique.

26.Moraes, A. (2006). *Disturbios de aprendizagem: uma abordagem psicopedagógica.* Ribeirão Preto, Brasil: Click Book.

27.Moreira, M. A. (23 de Abril de 2010). O que é Afinal a aprendizagem significativa.

28.Morais, C. (2010). Investigação: Do problema ao resultado. 2.Braga portugal

29.Neto, R. M. (2009). *Alternativa Metodológica para o ensino e aprendizagem de números complexos: Uma experiência com professores e alunos.* Belo Horizonte, Brasil.

30.Nolasco, B. B. (2009). *Racionalização de Uma Expressão de dois termos com n maior que 3 e sua apliacbilidade em Análise Matemática.* Lubango, Huíla , Angola.

31.Numbi, C. (2013). *Texto de apoio de metodologia de ensino de Física.* Lubango, Angola.

32.Ponte, J. P., & Serrazina, M. D. (2000). *Didáctica Da Matemática Do 1º Cíclo.* Lisboa, Portugal: Texto de Base. Obtido de www.univ-ab.pt

33. Possani, C. (Produtor). (2016). *Raízes em R* [Filme]. Brasil. Obtido de https://www.youtube.com/watch?v=LOLTsguKiok

34. Queria, M. B., & Barros , J. M. (2020). *Didáctica da Matemática- Teorias e Aplicações* (ECO7 ed., Vol. I). Luanda.

35. Roque, T., & Carvalho, J. B. (2012). *Tópicos de História da Matemática. Sociedade Brasileira.* SBM.

36. Satulo, C. C. (2016). *Incentivos do calculos de Riaz Quadradas, pela referencia de Bakhshãli- Na 8ª Classe na zona de influência Pedagógica (ZIP 21)- Do I ciclo do nsino secundário , Municipio de Moçâmedes.* Lubango, Huíla, Angola.

37.Silva, A. O. (2013). *Cálculo da Raiz Quadrada Através dos Séculos.* joão pessoa , Paraiba, Brasil.

38.Silva, G. F. (2016). *Algoritmo da raiz quadrada: Uma contribuição a somar seu apredizado.* Rio Grande do Nortes/Sedis, Brasil.

39.Stoodi. (2013). *Studdi-Calculo da raiz qadrada.* Obtido em 01 de Janeiro de 2023, de Stoodi: https://www.stoodi.com.br/guias/dicas/calculo-de-raiz-quadrada/

40.Sungo, S. (2007). *Alternativa metodológica para melhorar o ensino-aprendizagem das equações quadrátias no ensino médio.* Lubango, Huíla, Angola.

41.Vianna, J., Chaves , J. M., Bernardi, F. N., & Frison, M. D. (08 de Novembro de 2009). Livro Didático Como Instrumrnto de Apoio Para Construção de Propostas de Ensino de Ciências Naturais. Obtido de https://docplayer.com. br/7582442-Livro-didatico-como-instrumento-de-apoio-para-construcao-de-propostas-de-ensino-de-ciencias-naturais.html

42.Weiss, M. (2002). *Psicopedagia Clinica: uma visão diagnostica dos problemas de aprendizagem escolar.* Rio de Janeiro, Brazil.

APÊNDICES

APÊNDICE 1. Inquérito aos professores da 9ª classe.

Caro professor, o presente inquérito por questionário destina-se a aquisição de opiniões sobre a abordagem do tema **“ Proposta de uma alternativa metodológica para o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe. Um estudo no complexo escolar 116 Imaculada conceição- Lubango”.** Trabalho este que será apresentado para a obtenção do grau de mestre em ensino das ciências, na opção de Matemática, pelo ISCED-Huíla. As suas respostas serão muito importantes pelos motivos esclarecidos acima. Por isso, solicita-se a sua honestidade nas mesmas e elas terão carácter confidencial.

Muito obrigado pela sua colaboração

Identificação do professor

1- Habilitações Literárias;____
2- Área de formação/Especialidade:________________________________
3- Classe que Lecciona:____
4- Tempo de serviço na Educação:________________________________
5- Tempo que lecciona a 9ª classe:________________________________
6- Escola/ Localidade em que trabalha:_____________________________
7- Género:____

Questões

1- O cálculo da raiz quadrada é um tema da 9ª Classe. Caro professor tem leccionado este tema?

Sim ☐ Não ☐

Se assinalou “Não” diga as razões:___________________________________

____
____
____
____

2- Das estratégias abaixo qual delas usas para o cálculo da raiz quadrada?

a) Método de factorização ☐
b) Método de tentativas e erros ☐
c) Método das bissecções ☐
d) Método tradicional ☐
e) Tenho ensinado de outra maneira ☐

Se escolheu a opção "e)", explique qual maneira tem ensinado os alunos:____

____
____
____
____
____

3- Os alunos apresentam dificuldades em aprender o cálculo da raiz quadrada?

Sim ☐ Não ☐

Se sim; que tipo de dificuldades?____________________________

____
____
____
____
____

4- A falta de métodos alternativos pode ocasionar a limitações ou a falta de motivação do aluno ao processo de ensino aprendizagem?

Sim ☐ Não ☐

Justifique:____

____
____
____
____
____

5- Já ouviu falar do método de Jonofon Sérates para o cálculo da raiz quadrada?

Sim ☐ Não ☐

Se sim; o que achou do método?____

6- Achas relevante a elaboração de uma proposta alternativa para o cálculo da raiz quadrada?

Sim ☐ Não ☐

Justifique: ____

APÊNDICE 2. Resultado do inquérito dirigido aos professores da 9ª Classe do Complexo Escolar 116 “Imaculada Conceição” – Lubango.

Perguntas	**Respostas**	**Professores da 9ª Classe**	
		Frequência	**%**
1	Sim	2	100,0
	Não	0	0,0
2	a)	1	50,0
	a) e b)	1	50,0
	c)	0	0,0
	d)	0	0,0
	e)	0	0,0
3	Sim	2	100,0
	Não	0	0,0
4	Sim	2	100,0
	Não	0	0,0
5	Sim	0	0,0
	Não	2	100,0
6	Sim	2	100,0
	Não	0	0,0

APÊNDICE 3. Inquérito aos alunos da 9ª classe.

Estimado aluno, o presente inquérito por questionário destina-se a aquisição de opiniões sobre a abordagem do tema “ **Proposta de uma alternativa metodológica para o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe. Um estudo no complexo escolar 116 Imaculada conceição- Lubango”.** Trabalho este que será apresentado para a obtenção do grau de Mestre em Ensino das Ciências, na opção de Matemática, pelo ISCED-Huíla. As suas respostas serão muito importantes pelos motivos esclarecidos acima. Por isso, solicita-se a sua honestidade nas mesmas e elas terão carácter confidencial.

Muito obrigado pela sua colaboração

I

IDENTIFICAÇÃO DO (A) ALUNO (A)

Escola:____

Classe_______

Regular/Adulto__________; Idade____________; Género__________;

II

Questões

1- É repetente? Sim ☐ Não ☐
2- Gosta de Matemática? Sim ☐ Não ☐
3- Já ouviu falar do cálculo da raiz quadrada? Sim ☐ Não ☐
4- O estudo do cálculo da raiz quadrada tem sido interessante? Sim ☐ Não ☐
5- Sabes efectuar o cálculo da raiz quadrada? Sim ☐ Não ☐
6- Desde que começaste a estudar até hoje que métodos (procedimentos) aprendeste para o cálculo da raiz quadrada?
   a) Método de factorização ☐
   b) Método de tentativas e erros ☐

c) Método das bissecções ☐

d) Método tradicional ☐

e) Outros métodos ☐

Se escolheu a opção “e)”, explique que métodos utilizam:________________

____

____

____

____

____

7- Tens tido dificuldades no cálculo da raiz quadrada? Sim ☐ Não ☐

Se sim, que dificuldades?

____

____

____

____

8- Achas interessante aprender um novo procedimento para o cálculo da raiz quadrada? Sim ☐ Não ☐

Se respondeste “sim”, diz o porquê?

____

____

____

____

III Teste

1- Resolver os seguintes exercícios recorrendo aos conhecimentos por ti aprendidos sobre o cálculo da raiz quadrada.

a) $\sqrt{81}$

b) $\sqrt{1024}$

c) $\sqrt{5}$

APÊNDICE 4. Resultado do inquérito dirigido aos alunos da 9ª Classe do Complexo Escolar 116 “Imaculada Conceição” – Lubango.

Perguntas	Respostas	Alunos da 9ª Classe	
		Frequência	%
1	Sim	12	8,8
	Não	122	89,7
	Sem resposta	2	1,5
2	Sim	93	68,4
	Não	39	28,7
	Sem resposta	4	2,9
3	Sim	136	100,0
	Não	0	0,0
4	Sim	114	83,8
	Não	20	14,7
	Sem resposta	2	1,5
5	Sim	89	65,4
	Não	44	32,4
	Sem resposta	3	2,2
6	a) e b)	87	64,0
	só b)	49	36,0
	c)	0	0,0
	d)	0	0,0
	e)	0	0,0
7	Sim	81	59,6
	Não	51	37,5
	Sem resposta	4	2,9
8	Sim	121	89,0
	Não	11	8,1
	Sem resposta	4	2,9

APÊNDICE 5. Resultado do teste dirigido aos alunos da 9ª classe do Complexo Escolar 116 “Imaculada Conceição” – Lubango.

Teste: 1a)

	Frequência	**Percentagem**	**Percentagem Válida**	**Percentagem acumulada**
Certo	23	16,9	16,9	16,9
Errado	61	44,9	44,9	61,8
Sem Resposta	52	38,2	38,2	100,0
Total	136	100,0	100,0	

Teste: 1b)

	Frequência	**Percentagem**	**Percentagem Válida**	**Percentagem acumulada**
Certo	22	16,2	16,2	16,2
Errado	59	43,4	43,4	59,6
Sem Resposta	55	40,4	40,4	100,0
Total	136	100,0	100,0	

Teste: 1c)

	Frequência	**Percentagem**	**Percentagem Válida**	**Percentagem acumulada**
Certo	16	11,8	11,8	11,8
Errado	54	39,7	39,7	51,5
Sem Resposta	66	48,5	48,5	100,0
Total	136	100,0	100,0	

APÊNDICE 6. Guia de revisão dos cadernos dos alunos da 9ª classe do Complexo Escolar 116 “Imaculada Conceição” – Lubango.

Esta revisão foi feita com objectivo de:

1- Constatar, nos cadernos dos alunos, a existência ou não de exercícios sobre o cálculo da raiz quadrada resolvidos;
2- Constatar os procedimentos que o professor usa para ensinar o cálculo da raiz quadrada aos alunos.

APÊNDICE 7. Guia de entrevista ao coordenador.

Objectivo: Conhecer as particularidades relativas às estratégias metodológicas utilizadas para o tratamento do cálculo da raiz quadrada relativos a:

- Reuniões na Zip
- Procedimentos utilizados
- Livros de textos utilizados

Desenvolvimento da entrevista:

- Apresentação e comunicação do objectivo da entrevista
- Aspectos a abordar na entrevista:

1- Caro coordenador tem participado nas reuniões da ZIP?
2- Que estratégias metodológicas utilizam na ZIP para o tratamento do cálculo da raiz quadrada?
3- Considera que as metodologias utilizadas na ZIP para o cálculo da raiz quadrada, contribuem para a aprendizagem do grupo de alunos da escola onde trabalha?
4- Que procedimentos utilizam para o tratamento do cálculo da raiz quadrada?
5- Durante as reuniões na ZIP são sugeridos os livros de textos a utilizar durante o ano lectivo de cada classe?
6- Que livros de texto utilizam para o ensino da Matemática na 9ª Classe?
7- Em que medida as reuniões na ZIP contribuem para melhorar a aprendizagem para o cálculo da raiz quadrada?
8- Durante as oficinas na ZIP já abordaram sobre a alternativa metodológica para o cálculo da raiz quadrada, utilizando o método de Jonofon Sérates?
9- Em que medida as discussões sobre as alternativas metodológicas para o ensino dos diferentes conteúdos matemáticos podem contribuir para a aprendizagem dos alunos?
10- Têm cumprido com o programa?
11- Aspectos conclusivos.

APÊNDICE 8. Questionário de consulta aos especialistas.

Estimado professor:

Nesta Investigação precisamos de sua valiosa colaboração através dos critérios que podem aperfeiçoar a **proposta de uma alternativa metodológica para o cálculo da raiz quadrada na 9ª classe. Um esttudo no complexo escolar "116 imaculada conceição".**

Desde já os nossos agradecimentos pela tão prestimosa contribuição, e solicitamos que responda com máxima sinceridade.

Por favor, preencha os seus dados Gerais:

1- Anos de experiência no trabalho Docente:________________________

2- Cargo que ocupa:____

3- Grau científico:____

4- Área de formação:____

Após lido o material que expomos em anexo, agradecemos que assinale da questão 1 à 7 com um X, segundo as categorias de avaliação dos elementos da proposta metodológica a seguir:

MA: Muito adequado **BA:** Bastante adequado **A:** Adequado **PA:** Pouco adequado **NA:** Não adequado

Nº	**Aspectos a classificar sobre a proposta**	**MA**	**BA**	**A**	**PA**	**NA**
1	Estrutura da proposta para o alcance dos objectivos					
2	Conteúdo da proposta					
3	Coerência da actividade proposta					
4	Aplicabilidade da proposta					
5	Procedimentos para o cálculo da raiz quadrada					
6	Possibilidades para a proposta contribuir para o ensino do cálculo da raiz quadrada					
7	Grau de actualidade da investigação em causa					

Expresse as suas críticas e sugestões para melhorar a proposta:

APÊNDICE 9. Tabela de frequência do questionário aplicado aos especialistas.

Anos de Experiências no Trabalho Docente

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
10 a 20 Anos	5	55,6	55,6	55,6
20 a 30 Anos	2	22,2	22,2	77,8
30 a 40 Anos	2	22,2	22,2	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Cargo Ocupado

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Apenas Professor	7	77,8	77,8	77,8
Coordenador de disciplina	1	11,1	11,1	88,9
Chefe de secção	1	11,1	11,1	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Grau Científico

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Licenciado	3	33,3	33,3	33,3
Mestre	6	66,7	66,7	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Área de Formação

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Ensino da Matemática	5	55,6	55,6	55,6

Matemática e Aplicações	2	22,2	22,2	77,8
Economia	1	11,1	11,1	88,9
Supervisão pedagógica e Formação de formadores	1	11,1	11,1	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Questão 1: Estrutura da proposta para o alcance dos objectivos.

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Muito Adequado	5	55,6	55,6	55,6
Bastante Adequado	3	33,3	33,3	88,9
Adequado	1	11,1	11,1	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Questão 2: Conteúdo da proposta.

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Muito Adequado	2	22,2	22,2	22,2
Bastante adequado	6	66,7	66,7	88,9
Adequado	1	11,1	11,1	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Questão 3: Coerência da actividade proposta.

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Muito adequado	3	33,3	33,3	33,3
Bastante adequado	4	44,4	44,4	77,8

Adequado	2	22,2	22,2	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Questão 4: Aplicabilidade da proposta.

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Muito Adequado	4	44,4	44,4	44,4
Bastante adequado	3	33,3	33,3	77,8
Adequado	2	22,2	22,2	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Questão 5: Procedimentos para o cálculo da raiz quadrada.

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Muito adequado	4	44,4	44,4	44,4
Bastante adequado	3	33,3	33,3	77,8
Adequado	2	22,2	22,2	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Questão 6: Possibilidades da proposta contribuir para o ensino do cálculo da raiz quadrada.

	Frequência	Percentagem	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Muito adequado	6	66,7	66,7	66,7
Bastante adequada	3	33,3	33,3	100,0
Total	9	100,0	100,0	

Questão 7: Grau de actualidade da investigação em causa.

	Frequência	Percentage m	Percentagem válida	Percentagem acumulada
Muito adequado	3	33,3	33,3	33,3

Bastante adequada	5	55,6	55,6	88,9
Adequada	1	11,1	11,1	100,0
Total	9	100,0	100,0	

APÊNDICE 10. Relação *Dimensão - Indicador- Instrumento*.

Dimensão	Indicador	Instrumento					
		Inquerito dirigido aos alunos	Inquérito dirigido aos professores	Entrevista ao coordenador	Observação ao manual da classe	Observação aos cadernos dos alunos	Teste dirigido aos alunos
Pedagógica	Estratégias metodológicas para o cálculo da raiz quadrada nas reuniões da ZIP			x			
	Procedimentos para o cálculo da raiz quadrada	X	x		x	x	
	Dificuldades dos alunos ao cálculo da raiz quadrada	X	x				
Pré-requisitos	Ensino do cálculo da raiz quadrada		x				
	Área de formação dos professores		x				
	Interesse dos alunos para aprendizagem do cálculo da raiz quadrada	X					
Científica	Habilidades para o cálculo da raiz quadrada						x

APÊNDICE 11. Classificação dos indicadores (diagnóstico).

Indicador	Inquérito aos alunos	Inquérito aos professores	Entrevista ao coordenador	Observação ao manual	Observação aos cadernos dos alunos	Teste aos alunos	Avaliação final
Estratégias metodológicas para o cálculo da raiz quadrada nas reuniões da ZIP			Não adequada				Não adequada
Procedimentos para o cálculo da raiz quadrada	Pouco adequada	Pouco adequada		Pouco adequada	Pouco adequada		Pouco adequada
Dificuldades dos alunos ao cálculo da raiz quadrada	Bastante	Bastante					Bastante
Ensino do cálculo da raiz quadrada		Pouco adequada					Pouco adequada
Área de formação dos professores		Adequada					Adequada
Interesse dos alunos para aprendizagem	Bastante adequada						Bastante adequada

do cálculo da raiz quadrada							
Habilidades para o cálculo da raiz quadrada						Não adequada	Não adequada

Apêndice 12. Curiosidade biográfica de Jonofon Sérates.

José Nogueira Fontes, nascido em Largato, a 21 de Junho de 1934, e morto em Acaraju, a 02 de Janeiro de 2012, mais conhecido pelo heterônimo Jonofon Sérates, foi um matemático brasileiro, bacharel, mestre e doutor em Matemática, pela Universidade de Brasília; pós-graduado em programação financeira pela Escola de Administração Fazendária; foi membro da Academia Maçônica de Letras, Ciências e Artes no Nordeste do Brasil.

Jonofon foi professor por mais de 45 anos, além de examinador de cursos por mais de uma década. Foi professor de cálculo integral, raciocínio matemático quantitativo, numérico, analítico e crítico e Matemática Financeira nos cursos de pós-graduação da Fundação Getúlio Vargas (FGV).

Proferia conferências sobre lógica na educação e na Matemática para alunos, professores, pais de alunos e servidores de diversos órgãos públicos e privados.

Escritor das obras: Raciocínio Lógico – Volume 1, Raciocínio Lógico – Volume 2, Métodos Cuca Legal de efectuar as operações no conjunto dos números naturais.

Jonofon foi aluno e assistente de Malba Tahan, o autor de "O Homem que Calculava" e de outras 115 obras. Foi Malba Tahan quem transformou José Nogueira Fontes em Jonofon Sérates. Malba Tahan pegou o *JO* de José, o *NO* de Nogueira e o *FON* de Fontes, fez Jonofon. Em seguida, ele pegou as últimas sílabas de JoSÉ, NogueiRA e FonTES e fez Sérates.

Professor Jonofon Sérates. (*Fonte: Wikipedia*.)

ANEXOS

ANEXO 1. Apresentação dos objectivos gerais, do plano temático e dosificação do Tema 1 do Programa de Matemática da 9ª classe.

Objectivos Gerais da Matemática na 9ª Classe

- Compreender os números racionais.
- Analisar a relação entre números reais e decimais.
- Compreender a comparação dos números reais.
- Compreender o intervalo dos números reais, assim como a intersecção e reunião de intervalos.
- Conhecer o cálculo em IR.
- Aplicar a interpretação geométrica na solução de equações.
- Conhecer sistemas de equações do 1º grau a duas incógnitas.
- Compreender os métodos de resolução do sistema de duas equações lineares do 1º grau a duas incógnitas.
- Compreender a resolução da inequação do primeiro grau.
- Analisar as soluções de uma equação do 2º grau.
- Conhecer as regras de resolução da equação do 2º grau, nomeadamente, a lei de anulamento do produto e a fórmula resolvente.
- Compreender a decomposição de um binómio ou trinómio em factores, com vista à resolução de equações.
- Compreender os procedimentos da resolução de problemas.
- Analisar situações de proporcionalidades inversas apresentadas de diferentes formas, indicando a constante de proporcionalidade.
- Compreender tabelas e gráficos a partir da observação de dados.
- Conhecer as razões trigonométricas de um ângulo agudo.
- Aplicar as fórmulas fundamentais da trigonometria na resolução de problemas.
- Compreender a determinação de uma razão trigonométrica de um ângulo agudo conhecendo outra.
- Compreender a resolução de problemas que envolvem razões trigonométricas.
- Analisar as estratégias adequadas para a determinação de distâncias de locais inacessíveis, altura de edifícios.

- Compreender a amplitude de ângulos ao centro.
- Compreender as relações existentes entre arcos, cordas, tangente e raios.
- Compreender as simetrias do círculo.
- Conhecer a amplitude dos ângulos internos e externos de polígonos convexos.
- Conhecer a rotação e os seus elementos.
- Compreender a realização de rotações de segmento recta triângulo.

Plano Temático

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="2">Tema</th><th rowspan="2">Trimestre</th><th colspan="4">Horas lectivas</th></tr>
<tr><th>Aulas</th><th>Avaliação</th><th>Reserva</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Aprofundamento do estudo dos números e operações</td><td>I</td><td>36</td><td>2</td><td>1</td><td>39</td></tr>
<tr><td>1</td><td>Aprofundamento do estudo dos números e operações</td><td rowspan="2">II</td><td>21</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">36</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Proporcionalidade inversa, Representações gráficas</td><td>12</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Trigonometria do triângulo</td><td rowspan="2">III</td><td>17</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">39</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Geometria circunferência e polígonos, rotações</td><td>19</td></tr>
</table>

Tema 1: Aprofundamento de estudos dos números de operações.

Objectivos Gerais

- Compreender os números reais.
- Compreender os intervalos de números reais com a intersecção de intervalo.
- Conhecer os princípios de equivalências para resolução de equações do 1º grau a duas incógnitas.
- Conhecer os métodos de resolução do sistema de duas equações do 1º grau a duas incógnitas.
- Conhecer inequações do 1º grau a uma incógnita.
- Conhecer regras de resolução de equações do 2º grau.

Objectivos Específicos	Subtemas	Conteúdos	Carga Horária		
			Teórica	**Teórico-prática**	**Prática**
➢Distinguir dízimas dos números irracionais. ➢Calcular a raiz quadrada de números reais. ➢Representar os números numa recta real. ➢Reconhecer os cálculos em IR. ➢Identificar os intervalos numéricos. ➢Reconhecer a disjunção de condição e reunião de conjuntos. ➢Reconhecer a conjunção e a intersecção.	Subtema 1.1: números reais	1.1.1 Dízimas e Números Irracionais		2	
		1.1.2 Fracção Geratriz		1	1
		1.1.3 Cálculo da Raiz Quadrada		1	1
		1.1.4 Recta Real		1	
		1.1.5 Relações de <e> em R		1	1
		1.1.6 Cálculo em R		1	1
		1.1.7 Intervalos de Números Reais		1	
		1.1.8 Disjunção de Condições e Reunião de Conjuntos		1	
		1.1.9 Conjunção de Condições e Intersecção			

➢ Definir a inequação. ➢ Resolver as inequações.	Subtema 1.2: Inequações	1.2.1 Noção de inequação		1	
		1.2.2 Métodos de resolução das Inequações		1	1
➢ Definir a equação do 1º grau. ➢ Resolver equações do 1º grau a duas incógnitas. ➢ Interpretar geometricamente as soluções de equações do 1º grau a duas incógnitas	Subtema 1.3: Equações do 1º grau a duas incógnitas	1.3.1 Introdução às equações do 1º grau a duas incógnitas		2	
		1.3.2 Métodos de resolução de equações do 1º grau a duas incógnitas		1	
		1.3.3 Interpretação geométrica		1	2
➢ Definir sistemas de duas equações lineares do 1º grau a duas incógnitas. ➢ Reconhecer os métodos de resolução de equações lineares do 1º grau a duas incógnitas. ➢ Resolver problemas que envolvem sistema de equações lineares do 1º grau a duas incógnitas.	Subtema 1.4: Sistema de duas equações linear do 1º grau a duas incógnitas	1.4.1 Introdução ao sistema de duas equações lineares do 1º grau a duas incógnitas		2	
		1.4.2 Métodos de resolução		1	1
		1.4.2.1 Método de substituição		1	2
		1.4.2.2 Método de comparação		1	2
		1.4.2.3 Método de redução ao coeficiente simétrico		1	2
		1.4.2.4 Método gráfico		2	
		1.4.3 Resolução de problemas que envolvem sistema de equações lineares do 1º grau a duas incógnitas		2	
➢ Definir a equação do 2º grau.		1.5.1 Introdução à equação do 2º grau		1	

➢ Resolver equações do 2º grau incompleta. ➢ Resolver equação do 2º grau completa sem a fórmula resolvente. ➢ Introduzir a fórmula resolvente. ➢ Resolver equações do 2º grau usando a fórmula resolvente. ➢ Discutir a existência de raízes da equação do 2º grau. ➢ Construir equações quadráticas dadas as suas raízes. ➢ Definir equações biquadráticas. ➢ Resolver equações biquadráticas. ➢ Resolução de problemas que envolvem sistema de equações linear do 1º grau a duas incógnitas.	Subtema 1.5: equação do 2º grau	1.5.2 Resolução de equações do 2º grau			
		1.5.2.1 Resolução das equações do 2º grau incompletas e completas		1	1
		1.5.2.2 Fórmula resolvente da equação do 2º grau		1	1
		1.5.2.3 Discussão da existência de raízes da equação do 2º grau		2	
		1.5.2.4 Propriedade das raízes		2	
		1.5.2.5 Construção da equação quadrática dadas as suas raízes		2	
		1.5.2.6 Introdução à equação biquadrática		1	
		1.5.2.7 Resolução da equação biquadrática		1	1
		1.5.2.7 Resolução de problemas que envolvem equações do 2º grau		2	