



República de Angola

*

INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO DA HUÍLA

ISCED – HUÍLA

**PROPOSTA DE ESTRATÉGIAS PARA A OBTENÇÃO DO N-ÉSIMO TERMO
DE SUCESSÕES E A SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COM RECURSO A
GEOGEBRA NA 11.ª CLASSE. UM ESTUDO DE CASO NA ESCOLA DE
FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS, OPÇÃO
MATEMÁTICA**

AUTOR: ZOLA FRANKLIN KIAMENDILA

Lubango, 2023



INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DA EDUCAÇÃO DA HUÍLA
ISCED – HUÍLA

**PROPOSTA DE ESTRATÉGIAS PARA A OBTENÇÃO DO N-ÉSIMO TERMO
DE SUCESSÕES E A SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COM RECURSO A
GEOGEBRA NA 11.ª CLASSE. UM ESTUDO DE CASO NA ESCOLA DE
FORMAÇÃO DE PROFESSORES**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS, OPÇÃO
MATEMÁTICA**

AUTOR: ZOLA FRANKLIN KIAMENDILA

Orientadora: Maria Teresa Bixirão Neto, Phd.

Lubango, 2023

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família, Joyce Inês Munana, Isabel Guelvia Samuel, Hilariante Munana Kiamendila, Emiliana Munana Kiamendila, e Elisian Munana Kiamendila pela sua paciência, compreensão, coragem e apoio ao longo desta caminhada.

Com muita consideração e amor: **Zola Franklin Kiamendila**

Agradecimentos

Primeiramente agradecer a Deus por ter me dado a sua graça em realizar este curso de Mestrado em Ensino de Matemática e nunca ter desistido por mais cansativo e frustrante que foi chegar até aqui, sempre fui movido pela fé.

Agradecer à minha esposa **Joyce Inês Munana**, pela paciência, dedicação e muito carinho que teve comigo nos momentos de frustração e ter sempre me motivado a nunca desistir, sempre persistir e ir muito além do que hoje vou.

Aos meus pais, pelo exemplo de dedicação ao trabalho que demonstram em cada dia da vossa vida, pela perseverança que vos fez chegar tão longe, pelos sacrifícios, pelas batalhas travadas, pelo aconchego das vossas palavras.

A ti mãe Emiliana Munana, por me ter recebido em sua casa no Lubango e nunca se cansou em garantir as melhores condições possíveis de estadia.

A Minha querida orientadora **Maria Teresa Bixirão Neto**, obrigado pela paciência e dedicação que teve comigo nesta longa caminhada.

Aos meus alunos que participaram na partilha de experiência, obrigado pelo vosso empenho, compreensão, carinho, amizade, cumplicidade. Por todas as horas que passamos juntos, pelos sorrisos, pela nossa ligação para sempre.

Aos pais e encarregados de Educação, pela disponibilidade, confiança e carinho e pelos filhos que têm e que transformam cada dia num dia melhor.

A todos os meus professores que participaram de forma directa ou indirecta nesta caminhada, meus sinceros agradecimentos.

“Se eu vi mais longe, foi por estar sobre ombros de gigantes.”

Isaac Newton

Lista de Siglas e Abreviaturas utilizadas

RA- Raciocínio Algébrico

RAE- Raciocínio Algébrico Elementar

INIDE- Instituto nacional de Investigação e desenvolvimento de Educação

PA- Progressão Aritmética

PG- Progressão Geométrica

SAE- Sentido Algébrico elementar

T.R- Tarefas relacionadas

R.P.C- Resolução Parcialmente correcta

R.I.- Resolução incorrecta

R.C- Resolução correcta

Mat/Física- Especialidade de Ensino a Matemática e Física

Resumo

A principal finalidade desta dissertação é investigar estratégias para a determinação do termo geral de sucessões sem recurso a fórmulas de progressão aritmética e/ou geométrica, promovendo a capacidade do raciocínio matemático dos alunos em especial o raciocínio algébrico. A fundamentação teórica centra-se no raciocínio algébrico, onde se caracteriza os seus diferentes níveis no ensino primário e secundário segundo a perspectiva teórica de Ensino e Aprendizagem da Matemática designada de Enfoque Ontossemiótico. Foi realizado um estudo com os alunos de duas turmas (11.^a e 12.^a Classes) de uma Escola de Formação de Professores, baseado na determinação de termos gerais de sucessões distintas dos casos particulares de sucessões aritméticas e/ou sucessões geométrica. O grupo de alunos, participantes no estudo, foi constituído por 58 alunos, das duas turmas referidas e com estes aplicou-se um pré-teste, seguido de uma acção formativa e, após esta intervenção formativa, aplicou-se um pós-teste. O pré-teste e o pós-teste, tiveram como objectivo analisar as estratégias utilizadas pelos alunos na determinação do termo geral de sucessões, bem como identificar diferenças existentes no nível do raciocínio algébrico dos alunos. Os resultados da avaliação final (pós-teste) mostram que houve uma diferença significativa na forma de encarar os termos de sucessões por parte dos alunos em relação aos resultados observados no pré-teste. Realizou-se ainda uma entrevista a um grupo de professores que leccionam na mesma escola, com o objectivo de analisar o ponto de vista dos mesmos sobre a abordagem do tema sucessões, que levou a concluir que nesta escola o enfoque é por vezes a memorização curricular, deixando-se de lado conteúdos capazes de estimular o raciocínio matemático.

Palavras-chave: Sucessões, Termo geral de sucessões, raciocínio algébrico, formação de professores, estratégias pedagógicas, GeoGebra

Résumé

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier des stratégies permettant de déterminer le terme général des séquences sans recourir à des formules arithmétiques et/ou de progression géométrique, favorisant ainsi la capacité de raisonnement mathématique des étudiants, en particulier le raisonnement algébrique. La base théorique se concentre sur le raisonnement algébrique, qui caractérise ses différents niveaux dans l'enseignement primaire et secondaire selon la perspective théorique de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques appelée approche ontosémiotique. Une étude a été réalisée auprès d'élèves de deux classes (11ème et 12ème années) d'une Ecole de formation des enseignants, basée sur la détermination de termes généraux de suites distincts des cas particuliers des suites arithmétiques et/ou des suites géométriques. Le groupe d'étudiants, participants à l'étude, était composé de 58 étudiants des deux classes mentionnées et avec eux un pré-test a été appliqué, suivi d'une action de formation et, après cette intervention de formation, un post-test a été appliqué. Le pré-test et le post-test visaient à analyser les stratégies utilisées par les étudiants pour déterminer le terme général des séquences, ainsi qu'à identifier les différences existantes dans le niveau de raisonnement algébrique des étudiants. Les résultats de l'évaluation finale (post test) montrent qu'il y a une différence significative dans la manière dont les étudiants perçoivent les modalités de succession par rapport aux résultats observés au pré test. Un entretien a également été réalisé avec un groupe d'enseignants qui enseignent dans la même école, dans le but d'analyser leur point de vue sur l'approche du sujet de la succession, ce qui a permis de conclure que dans cette école l'accent est mis sur le programme mémorisation, les contenus capables de stimuler le raisonnement sont laissés de côté.

Mots-clés : Successions, Terme général des successions, raisonnement algébrique, formation des enseignants, stratégies pédagogiques, GeoGebra.

Sumário

0. Introdução.....	2
0.1- Justificativa de Investigação.....	2
0.2- Ideia Básica a defender.....	3
0.3- Problema de Investigação.....	3
0.4- Objectivos de Investigação	4
0.4.1- Objectivo Geral	4
0.4.2- Objectivos Específicos.....	5
0.5- Hipótese da Investigação	5
0.5.1- Conceptualização e operacionalização das variáveis.....	5
0.5.2- O Objecto de Investigação	6
0.5.3- Campo de acção.....	6
0.6- Metodologia de estudo	6
0.6.1- Métodos empregues na investigação e instrumentos de investigação	7
0.7- População e Amostra	7
0.7.1- População.....	8
0.7.2- Critérios de selecção da amostra no grupo dos alunos	8
0.7.3- Critério de selecção da amostra no grupo dos Professores	8
0.8- Resultados esperados.....	9
0.9- Estrutura da Dissertação.....	9
CAPITULO I - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	11
1.0- Introdução	11
1.1- Raciocínio Matemático	11
1.2- Raciocínio Indutivo e dedutivo	13
1.3- As Dimensões de Álgebra e o significado de variáveis	14

1.4- Definição de Padrões	16
1.4.1- Generalização algébrica e generalização aritmética de padrões no estudo de sucessões	17
1.5- Raciocínio algébrico segundo uma abordagem ontossemiótica	19
1.5.1- A abordagem ontossemiótica	19
1.5.2- Vertentes fundamentais do Raciocínio algébrico.....	24
1.5.3- Os níveis do raciocínio algébrico	27
1.6- Análise do Programa de Matemática da 11. ^a Classe das escolas de Formação de Professores em Angola.....	34
1.7- Conceitos matemáticos fundamentais envolvidos nas sucessões	39
1.8- Sequência de Fibonacci	41
1.9- Progressão Aritmética	43
1.10- Números poligonais	44
1.11- Progressão Geométrica	46
1.12- Níveis do RA atingidas na determinação de termos gerais de sucessões	48
Conclusão do capítulo.....	52
CAPÍTULO II- PROPOSTA METODOLÓGICA DE ESTRATÉGIAS PARA DETERMINAÇÃO DO TERMO GERAL DE SUCESSÕES E RESPECTIVOS NÍVEIS DE RA.....	54
2.0- Introdução	54
2.1- Métodos e Procedimentos de recolha de dados	54
2.2- Proposta para determinação do termo geral de sucessões	54
2.2.1- Estratégia 1- Decomposição de termos da sucessão.....	55
2.2.2- Estratégia 2- parâmetros por determinar	57
2.2.3- Estratégia 3- Representação gráfica	62
2.3- Identificação dos níveis de RA nas tarefas do pós-teste.....	67
Conclusão do Capítulo.....	73

CAPÍTULO III- ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS.....	75
3.1- Análise de Resultados do Pré-Teste.....	75
3.2- Actividades desenvolvidas no âmbito da proposta.....	87
3.3- Comparação entre os resultados do pré-teste e os do pós-teste.....	90
3.3.1- Estatísticas da amostra na comparação do aproveitamento do Pré-Teste e Pós-Teste	91
3.4- Análise de entrevista realizada a professores.....	92
Conclusão do capítulo.....	95
Conclusões gerais.....	97
Sugestões para futuros trabalhos.....	98
Referências Bibliográficas	99

Índice de Figuras

Figura 1: Modelo interactivo do processo de raciocínio matemático.....	12
Figura 2: Dimensões da álgebra	16
Figura 3: Estrutura da Generalização algébrica de sequências.....	18
Figura 4: Organização em níveis de análise do Enfoque ontossemiótica	20
Figura 5:Enfoque transdisciplinar da Álgebra escolar	24
Figura 6: Gráfico de algumas funções da família de Funções quadrática.....	31
Figura 7: Relação de correspondência entre dois conjuntos	39
Figura 8: Diferença entre uma função real de variável real e a sua restrição em natural	41
Figura 9: Girassol e o Espiral das suas sementes	42
Figura 10: Gráfico comparativo de resolução das tarefas do pré-teste.....	75
Figura 11: Número máximo de candeeiros com 2,4 e 5 ruas.....	81
Figura 12: Gráfico Comparativo do desempenho dos alunos em Tarefas do pré-teste versus Pós-teste Propostas	90

Índice de Tabelas

Tabela 1: Vertentes fundamentais do Raciocínio algébrico	24
Tabela 2: Os níveis do RA para o ensino primário e Secundário.....	32
Tabela 3: Conteúdos relativos ao tema Sucessões.....	38
Tabela 4: Números de pétalas de algumas flores	42
Tabela 5: Sucessão de números poligonais	46
Tabela 6: Procedimento usado para determinar o termo geral	49
Tabela 7: Resumo do aproveitamento na primeira Questão do Pré-teste	77
Tabela 8: Resumo de aproveitamento na alínea a) da segunda questão do Pré-teste	78
Tabela 9: Resumo de aproveitamento na alínea b) da segunda questão	79
Tabela 10: Resumo de aproveitamento alínea a) da terceira questão.....	81
Tabela 11: Resumo de aproveitamento na alínea b) da terceira questão.....	81
Tabela 12: Resumo de aproveitamento na alínea c) da terceira questão	82
Tabela 13: Resumo de aproveitamento na alínea a) quarta questão	83
Tabela 14: Resumo de aproveitamento na alínea a) quarta questão	84
Tabela 15: Resumo de aproveitamento na alínea c) quarta questão.....	85
Tabela 16: Resumo de aproveitamento na alínea d) quarta questão	85
Tabela 17: Produções de 5 alunos em tarefas relacionadas com sucessões que não são PA nem PG no pré-teste e no pós-teste.....	88
Tabela 18: Estatísticas da Amostra.....	91
Tabela 19: Resumo da Entrevista realizada aos Professores.....	92
Tabela 20: Categorias de Níveis de RA extraídos nos relatos dos professores	94

0- INTRODUÇÃO

0. Introdução

É nos primeiros anos de escolaridade que os primeiros conceitos científicos começam a ser formados e isso é válido para todas as áreas do conhecimento, sejam elas ligadas a ciências exactas ou não. A Matemática é a ciência que quando ensinada com insuficiências, ela é tida como um enigma e facilmente é abominada e vista como a grande responsável pelo insucesso escolar nas diversas áreas de conhecimento. Alarcão (2001) destaca que um bom professor tem de ser também um investigador, desenvolvendo uma investigação em íntima relação com a sua função. A autora justifica esta ideia nos seguintes termos:

Realmente não se pode conceber um professor que não se questiona sobre as razões subjacentes às suas decisões educativas, que não se questione perante o insucesso de alguns alunos, que não faça dos seus planos de aulas meras hipóteses de trabalho a confirmar ou não no laboratório que é a sala de aula, que não leia criticamente os manuais ou as propostas didácticas que lhe são feitas, que não se questione sobre as funções de escola e sobre se elas estão sendo realizadas.

O presente trabalho tem por objectivo propôr Estratégias algébricas que auxiliem na determinação de termos gerais de sucessões que não são PA nem PG, possibilitando assim o desenvolvimento do nível do raciocínio algébrico dos alunos.

0.1- Justificativa de Investigação

Ao constatar as dificuldades que os alunos apresentam na determinação do termo geral de sucessões que não são Progressão Aritmética e nem Geométrica, que são os casos mais comuns no ensino em Angola, inspirou o autor a viabilizar este projecto de pesquisa em sucessões, com ênfase na determinação do termo geral de sucessões que não são PA nem PG.

Além das dificuldades constatadas, que geraram a oportunidade para o presente trabalho, é necessário que se ofereça ao aluno do ensino secundário angolano e não só e ao futuro professor uma base sustentável de conceitos e estratégias matemáticas, os quais lhes serão úteis em diferentes contextos.

Consultados os programas e currículos de Angola, identificou-se lacunas no ensino de sucessões, pois ensina-se apenas fórmulas para se encontrar o termo geral das Progressões Aritmética e/ou Geométrica, criando assim insuficiências bastantes grandes, quando se pretende determinar, por exemplo o termo geral de sucessão de números triangulares, ou outras sucessões que não estejam em Progressão Aritmética nem Geométrica. Com base nestes pensamentos e com o foco em desenvolver estratégias de auxílio, que venham facilitar a determinação dos termos gerais destas sucessões, formulou-se o seguinte tema que servirá de foco à investigação a desenvolver: Proposta de Estratégias para a Obtenção do n - ésimo termo de Sucessões e a sua representação gráfica com recurso ao GeoGebra na 11.^a Classe. Um estudo de caso na Escola de Formação de Professores.

0.2- Ideia Básica a defender

Para o autor, o ensino e aprendizagem de sucessões na 11.^a Classe nas escolas de Formação de Professores, não deve limitar-se apenas na obtenção de termos gerais de sucessões que estão em Progressões Aritméticas e/ou Geométricas, dando fórmulas tal como se verifica actualmente, privilegiando a memorização em detrimento do raciocínio matemático. É preciso que se aumente o leque de conhecimento, com a obtenção de termos gerais de outras sucessões tais como de números poligonais e outras de expressão geral polinomial, pois no entender do autor, as dificuldades que são apresentadas na determinação dos termos gerais de sucessões que não são Progressão Aritmética e/ou Geométrica deve-se ao facto de escola não abordar sucessões de outro tipo nas suas aulas.

0.3- Problema de Investigação

Para Marconi e Lakatos (2003), formular um problema consiste em dizer, de maneira explícita, clara, compreensível e operacional, qual a dificuldade com a qual se defronta e que se pretenda resolver, limitando o seu campo e apresentando suas características.

Na escola de Formação de Professores, os assuntos relacionados com a obtenção do termo geral de Progressão Aritmética e/ou Geométrica são

tratados e dados de forma habitual, com fórmulas que facilitem a obtenção dos respectivos termos gerais. Quando a sucessão é de outro tipo, a abordagem parte do termo geral para os termos particulares. Factos como estes que podem estar na base das dificuldades que são apresentadas pelos alunos na obtenção de termos gerais de sucessões que não são PA nem PG, constatados pelo autor.

Assim para uma reflexão sobre estratégias de obtenção do termo Geral de sucessões que não são PA nem PG, na Escola de Formação de Professores e responder questões acerca do assunto, formulou-se o seguinte problema:

- A falta de orientações dificulta a obtenção de termos gerais de sucessões que não são PA e/ou PG.

A situação levantada, mostra que não se tem tido bases suficientes e sólidas, capazes de assegurar e explorar no momento em que se precise determinar o termo geral de sucessões que não estejam em progressão Aritmética nem Geométrica, leva a formular as seguintes questões de investigação:

- ✓ Que estratégias se deve ter em conta na determinação do termo geral de sucessões que não são PA nem PG?
- ✓ Qual o nível de RA demonstrado pelos alunos antes e após a acção formativa, envolvendo a determinação do n -ésimo termo de uma sucessão?
- ✓ Que factores concorrem para a existência de dificuldades no tratamento de termos gerais de sucessões que não sejam PA e nem PG?

0.4- Objectivos de Investigação

O problema acima levantado, leva a reflectir e a traçar estratégias para responder as dificuldades constatadas, se de facto existem ou foi simplesmente um caso isolado. Daí que nesta investigação se pretende:

0.4.1- Objectivo Geral

- ✓ Propôr Estratégias algébricas que auxiliem na determinação de termos gerais de sucessões que não são PA nem PG

0.4.2- Objectivos Específicos

- ✓ Criar estratégias de auxílio na determinação do termo geral de sucessões cuja expressão geral uma função polinomial;
- ✓ Avaliar o recurso ao GeoGebra na determinação do n-ésimo termo de sucessões, conhecidos alguns termos;
- ✓ Analisar as perspectivas dos professores na obtenção do termo geral de sucessões que não são PA nem PG e a sua representação gráfica com recurso ao GeoGebra;
- ✓ Identificar os níveis de RA, envolvidos na determinação de termos gerais de sucessões.

0.5- Hipótese da Investigação

Marconi e Lakatos (2003) abordam a hipótese como uma suposta resposta, provável e provisória de um problema, cuja adequação será verificada pela sustentabilidade da pesquisa. Nesta pesquisa formulou-se a seguinte hipótese: Hipótese: Uma orientação metodológica que consiste na criação de estratégias que auxilie a obtenção do termo geral de sucessões que não estejam em Progressão Aritmética nem Geométrica, poderá promover o RA dos alunos na determinação de termos gerais de sucessões

0.5.1- Conceptualização e operacionalização das variáveis

Marconi e Lakatos (2003), destacam duas variáveis (Independente e a dependente). Para os autores, a variável independente é o antecedente e a dependente é a consequência, portanto, tendo em conta os objectivos da investigação, apresenta-se como variáveis:

Variável Independente: A criação de estratégias para a determinação de termos gerais de sucessões que não são Progressão Aritmética nem Geométrica.

Variável Dependente: desenvolvimento do nível de raciocínio algébrico dos alunos e uma aprendizagem significativa e segura na determinação de termos gerais de sucessões.

0.5.2- O Objecto de Investigação

Vários autores abordam a questão do objecto de investigação, Marconi e Lakatos (2003), destacam que, descrever o objecto de estudo é definir o que se pretende investigar. Tendo em conta o problema de investigação levantado, tem-se como objecto de investigação: o processo de ensino - aprendizagem de na 11.^a classe na Escola de Formação de Professores do I Ciclo.

0.5.3- Campo de acção

Marconi e Lakatos (2003), referem que o campo de acção é uma restrição do objecto de estudo, no âmbito do processo de ensino –aprendizagem, o presente trabalho incide na obtenção do termo geral de sucessões. Um estudo de caso na escola de Formação de Professores do I ciclo.

0.6- Metodologia de estudo

A metodologia é o estudo dos caminhos para se chegar a um determinado fim, mas também refere-se em como conduzir uma pesquisa. (Marconi & Lakatos, 2003).

A metodologia de pesquisa, compreende uma série de tipos de pesquisas, quanto à abordagem, natureza, aos objectivos e quanto aos procedimentos. Este trabalho assenta-se numa abordagem mista. A combinação das abordagens qualitativa e quantitativa, deve-se ao facto de que na abordagem qualitativa, pretende-se entender, descrever e explicar o porquê das dificuldades existentes quando o assunto é a determinação do n -ésimo termo de sucessões que não são Progressão Aritmética nem Geométrica, já na quantitativa pretende-se quantificar a informação recolhida e com o uso de técnicas estatísticas, compará-las e apresentar os resultados em tabelas e gráficos com devidas interpretações. Quanto aos objectivos traçados, tem-se uma pesquisa descritiva, baseada num pré - teste aplicado em duas turmas de uma das Escolas de Formação de Professores do I Ciclo, um pós-teste aplicado ao mesmo grupo após a intervenção formativa e uma entrevista realizada a cinco professores da mesma escola. Quanto aos procedimentos, utilizou-se a pesquisa bibliográfica, procurando assim fenómenos ou respostas

que ocorrem, para relacionar com outros factores na obtenção do termo geral de sucessões que não são Progressão Aritmética nem Geométrica.

0.6.1- Métodos empregues na investigação e instrumentos de investigação

Métodos Empíricos

- ❖ Medição: Utilizado para precisar informações numéricas sobre o conhecimento dos alunos;
- ❖ Observação: utilizado no registo de dados que constituíram o objecto de investigação;
- ❖ Recolha e análise de dados: na recolha de dados, usou-se instrumentos como:
 - ✓ Pré-teste: utilizado para analisar o estado actual do conhecimento dos alunos na determinação do termo geral de sucessões e consequentemente verificar o seu nível de RA;
 - ✓ Pós-teste: Utilizado para analisar o nível de RA, atingido pelos alunos depois da experiência pedagógica partilhada;
 - ✓ Entrevista: utilizado no diálogo com professores seleccionados, com o objectivo de analisar o ponto de vista dos mesmos acerca do processo de ensino e aprendizagem de sucessões.
 - ✓ Avaliação feita pelos especialistas.

Métodos teóricos

- ❖ Análise e síntese: tratou-se nos problemas essenciais que relacionam os conceitos matemáticos em geral, e em particular de sucessões;
- ❖ O método hipotético – dedutivo: utilizado para comprovar a hipótese formulada;
- ❖ Indução: utilizado na análise de casos particulares que serviram para a generalização;

0.7- População e Amostra

Marconi e Lakatos (2003) referem que a população é o conjunto de elementos que têm alguma característica em comum que se pretende estudar. As razões

económicas e o tempo disponível justificam a selecção de um grupo reduzido tirado desta população que farão parte do estudo, a que se denomina por Amostra.

0.7.1- População

Nesta dissertação, tem-se uma População constituída por dois conjuntos diferentes, sendo o primeiro, o universo de estudantes do curso de Mat/ Física da Escola de Formação de Professores do I ciclo (um total de 4 turmas) e o segundo, constituído por todos os professores de Matemática da mesma Escola. A escolha desta escola prendeu-se com a facilidade de acesso do autor aos alunos deste estabelecimento de ensino e à disponibilidade da Direcção da mesma, no sentido de facultar toda a logística necessária à recolha de dados.

0.7.2- Critérios de selecção da amostra no grupo dos alunos

Para a selecção de Amostra no grupo de alunos, usou-se a técnica de amostragem por julgamento (Não Probabilística). Recorreu-se aos alunos da 11.^a classe de Mat/Física e alunos da 12.^a Classe de Mat/Física. A escolha destes grupos específicos deveu-se a seguintes aspectos:

- ❖ O Tema em causa no programa é tratado na 11.^a Classe e no I Trimestre;
- ❖ Com a Problemática de Covid-19, os actuais alunos da 12.^a Classe não conseguiram tratar a temática Sucessões no ano lectivo 2021/2022 e é ano lectivo 2022/2023 que foi abordado o assunto;
- ❖ Estes grupos dão ao autor, uma certa garantia no quesito de informações actualizadas que se pretende recolher.

0.7.3- Critério de selecção da amostra no grupo dos Professores

Para a selecção de Amostra no grupo de professores, usou-se a técnica de amostragem não probabilística (julgamento), onde a intenção foi entrevistar professores com pelo menos quatro anos de experiência profissional, que corresponde em pelo menos um ciclo de formação secundária, pois esses

profissionais possuem informações relacionadas com o conhecimento dos alunos relativos a sucessões durante pelo menos um ciclo de formação.

0.8- Resultados esperados

Com esta dissertação, espera-se que:

- ✓ Os professores compreendam a necessidade da abordagem de termos gerais de sucessões que não estejam em Progressão Aritmética e/ou Geométrica através da divulgação do estudo na escola, junto do colectivo de professores;
- ✓ Desperte os professores a ideia de que é preciso que se ultrapasse as dificuldades que são apresentadas pelos alunos na determinação de termos gerais de sucessões que não são PA e/ou PG;
- ✓ Que ajude os alunos a atingir um nível de RA mais elevado, em relação ao nível constatado.

0.9- Estrutura da Dissertação

A presente dissertação, está estruturada em três capítulos precedidos de uma introdução que indica aspectos essenciais abordados no capítulo.

Capítulo I – Fundamentação Teórica

Neste capítulo retrata-se os referenciais teóricos explorados de diferentes bibliografias referentes ao raciocínio algébrico no ensino secundário e seus níveis.

Capítulo II – Proposta de estratégias para a determinação do n-ésimo termo de sucessões.

Neste capítulo, apresentou-se as estratégias que se pretende propor e a experiência pedagógica partilhada com alunos para a determinação do n-ésimo termo de sucessões, analisando os níveis de RA atingidos.

Capítulo III- Análise e discussão dos resultados

Este capítulo, reservou-se no sentido de se analisar os resultados do pré-teste, pós-teste, entrevista.

CAPÍTULO I- FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

CAPITULO I - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

1.0- Introdução

Neste capítulo, faz-se uma abordagem teórica dos principais conceitos de RA com a finalidade de apresentar ao leitor, um enquadramento teórico da proposta apresentada, baseada em estratégias algébricas para a determinação do n-ésimo termo de sucessões bem como o nível de RA envolvido nesse processo. Apresenta-se conceitos de raciocínio matemático, raciocínio algébrico, os níveis do raciocínio algébrico, caracterização do processo de ensino e aprendizagem de sucessões na 11.^a classe da escola de formação de professores, análise feita aos normativos (Programas) e por fim os conceitos básicos ligados a sucessões.

1.1- Raciocínio Matemático

Uma das capacidades indispensável para o desenvolvimento do intelecto matemático é o raciocínio. Raciocinar significa fazer inferências baseadas em razões, isto é, fazer inferências com fundamentos.

Oliveira (2008) usa a expressão raciocínio matemático para referir um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novos conhecimentos a partir dos já conhecidos ou assumidos (conhecimentos prévios). Lithner (2008) considera o raciocínio matemático como uma competência básica e estabelece a distinção entre o raciocínio matemático criativo e o raciocínio matemático imitativo.

O raciocínio é imitativo quando na resolução de um problema se imita um procedimento de solução memorizada.

O raciocínio matemático é criativo, quando provem da criação de uma sequência nova e existem argumentos que apoiam a escolha da estratégia com novidade, plausibilidade e fundamentação matemática e os seus argumentos estão assentes em propriedades matemáticas envolvidos no raciocínio. Numa perspectiva lógica, Aliseda (2003) identifica o raciocínio matemático como inferência dedutiva, caracterizada pela certeza e pela existência de uma relação necessária entre premissas e conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões.

No processo de ensino - aprendizagem da Matemática, usa-se o raciocínio para pensar sobre as propriedades de um determinado objecto matemático e

desenvolver generalizações que se apliquem a toda classe de objectos, também é visto como ferramenta para compreender a abstracção. Por outro lado. Deste modo, enquanto alguns autores salientam sobretudo os aspectos lógicos, outros valorizam mais o processo intuitivo, ou seja, como se formula novas ideias e se chega a conclusões.

Um dos objectivos gerais de ensino de Matemática para futuros professores do I Ciclo em Angola, é desenvolver a capacidade de traduzir a linguagem comum em linguagem algébrica, para comunicar ideias. (Instituto Nacional de Investigação e Desenvolvimento de Educação [INIDE], 2013). Numa perspectiva global do contexto actual angolano, o ensino da Matemática para futuros professores do I ciclo, deve acompanhar-se de conhecimentos técnicos, científicos e metodológicos de forma a desenvolver um pensamento racional, indutivo e dedutivo (p.4).

Pereira e Ponte (2011) apresentam um quadro para o estudo do raciocínio matemático dos alunos, que destaca a generalização e a justificação de tudo que se pode obter e/ou determinar, e por sua vez, estabelecem uma articulação entre estes processos com a formulação e teste de conjecturas. Consideram que o raciocínio matemático se apoia nas representações e articula-se com processos de representações e significados.

Lannin et al. (2011), consideram que raciocinar em Matemática é um processo evolutivo que envolve conjecturar, generalizar, investigar porquê, desenvolver e avaliar argumentos. Estes autores estabelecem um modelo do processo de raciocínio matemático que relaciona de forma interactiva a conjectura e generalização, a compreensão do porquê e a justificação ou refutação, de acordo com a figura 1 abaixo:

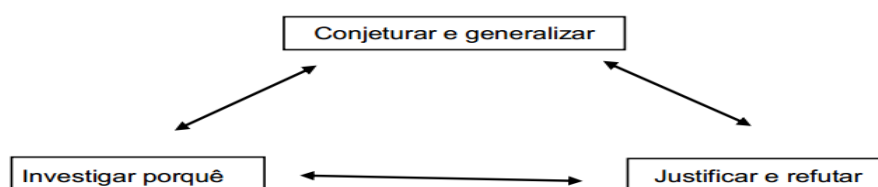


Figura 1: Modelo interativo do processo de raciocínio matemático.

Lannin et al. (2011, p.11)

Os aspectos indicados na figura 1, são divididos pelos autores em compreensões essenciais que os alunos devem possuir de modo a poderem

exercer o raciocínio. Para os autores, o primeiro aspecto abrange a conjectura e a generalização. Onde:

- ✓ Conjeturar inclui o raciocínio sobre relações com o intuito de estabelecer afirmações que se procuram que sejam verdadeiras, embora não se saiba se tal acontece;
- ✓ Generalizar envolve a procura de aspectos comuns entre casos ou a extensão do raciocínio para lá do domínio inicial.

No segundo aspecto, o raciocínio leva à pesquisa de vários factores que podem explicar porque é que a generalização é verdadeira ou falsa.

- ✓ É verdadeira no caso de ser satisfeita por todos sem excepção;
- ✓ É falsa caso não satisfaça em pelo menos um dos aspectos particulares.

Já no terceiro, envolve a justificação ou refutação, os autores assinalam que:

- ✓ A justificação se refere a um argumento lógico baseado em ideias previamente compreendidas;
- ✓ A refutação envolve demonstrar a falsidade de pelo menos um caso particular.

Como se pode verificar, a importância que o raciocínio matemático representa para a aprendizagem da Matemática, centrou suas atenções na indução e dedução enquanto tipos de raciocínio e na representação, justificação e demonstração, enquanto processos do raciocínio matemático.

1.2- Raciocínio Indutivo e dedutivo

O Ministério de Educação de Angola orienta que, o raciocínio matemático apareça como capacidade transversal em todas as classes de formação de Professores (INIDE, 2013).

Pereira e Ponte (2011) no seu trabalho intitulado raciocínio matemático no contexto algébrico, identificam quatro tipos de raciocínio:

- ✓ Indução;
- ✓ Dedução;
- ✓ Abdução;
- ✓ Transformação.

Dos quatro tipos tratados pelos autores, nesta dissertação destacou-se apenas dois (Indução e Dedução), as suas semelhanças e diferenças, constituem um

ponto de partida para a compreensão do que caracteriza o raciocínio matemático e os seus processos.

Segundo Pólya (1954), citado por Pereira e Ponte (2011), os processos de indução iniciam-se muitas vezes através da observação, sendo a partir desta que se desenvolvem conjecturas que devem necessariamente ser testadas. Este autor refere ainda outros processos relevantes no raciocínio indutivo e que ocorrem frequentemente durante a resolução de problemas matemáticos, nomeadamente a generalização, a especialização e a analogia. Oliveira (2002), sublinha igualmente a estreita relação entre analogia e indução salientando que quem induz, fá-lo por analogia. Por outro lado, o mesmo autor refere que é através do raciocínio indutivo que se desenvolvem conjecturas que podem ser posteriormente verificadas. Neste sentido, o raciocínio indutivo é heurístico, é desenvolvido do particular para o geral, sem uma conclusão necessária e com um papel de criação de conhecimento.

Por outro lado, o raciocínio dedutivo é característico estudo matemático de níveis de escolaridade mais avançados, onde ocupa um lugar fundamental. É um raciocínio formal, relacionado com as demonstrações e a lógica. Ponte et al. (2008) referem que raciocinar envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento.

1.3- As Dimensões de Álgebra e o significado de variáveis

Para Silva (2011), em álgebra as variáveis podem apresentar-se com significados diferentes, dependendo da dimensão que se trata:

1- Álgebra como generalização da Aritmética (Dimensão Aritmética)

Aqui a álgebra tem por objectivo tornar comuns as situações, com o auxílio de uso de propriedades em que ela estabelece uma afirmação. Por exemplo, na propriedade associativa de adição no caso $4 + (3 + 6) = (4 + 3) + 6$, logo

$$4 + 9 = 7 + 6$$
$$13 = 13$$

Nesta situação, como a propriedade da adição é aplicável para todo e qualquer número real, a álgebra aparece no sentido de obter uma generalização de tais números através de símbolos da seguinte forma: $x + (y + z) = (x + y) + z$, para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$

2- Álgebra no estudo de grandezas (Dimensão funcional)

É nestas condições que a álgebra assume realmente o seu papel. As letras podem apresentar variações no seu papel, podem apresentar-se como variáveis independentes ou dependentes. Como consequência, as letras não assumem aqui um valor fixo, por isso devem ser chamadas de variáveis num conjunto bem definido. Nesta dimensão, as letras apresentam uma relação de dependência entre si, não assumem um valor específico. Por exemplo, na função real $y = f(x) = x - 1$, a letra x pode tomar qualquer valor real e que resulte num novo valor real para o y .

3- Álgebra no estudo de um valor desconhecido (Dimensão de Equações)

É aqui que a letra assume uma posição de incógnita, é o caso de equações onde se procura encontrar o valor desconhecido através de diversas técnicas ou princípios de equivalências estudados, para tornar a relação numa proposição verdadeira. Temos como exemplo na resolução de equação $x - 4 = 6$, adicionar ambos os membros da igualdade por 4, resultaria em $x - 4 + 4 = 6 + 4$; $x = 10$. Isto quer dizer que a letra deve tomar apenas 10, como único valor real, de modo a tornar a relação dada em uma proposição verdadeira. Nestas circunstâncias a letra deve ser chamada de incógnita.

4- Álgebra no estudo de estruturas matemáticas (Dimensão estrutural)

Pode ser vista como uma aritmética representada por letras, que podem ser manipuladas seguindo as propriedades estudadas, mas que não tem por finalidade encontrar valores desconhecidos, mas sim servem para demonstrar propriedades e simplificar expressões. Brasil (1998), em parâmetros curriculares, destaca que existe um certo consenso de que para garantir o desenvolvimento do raciocínio algébrico, o aluno deve estar necessariamente engajado em actividades que relacionem as diferentes concepções da Álgebra. A figura 2, mostra como o autor simplifica as diferentes interpretações da Álgebra, formando assim dimensões da álgebra.

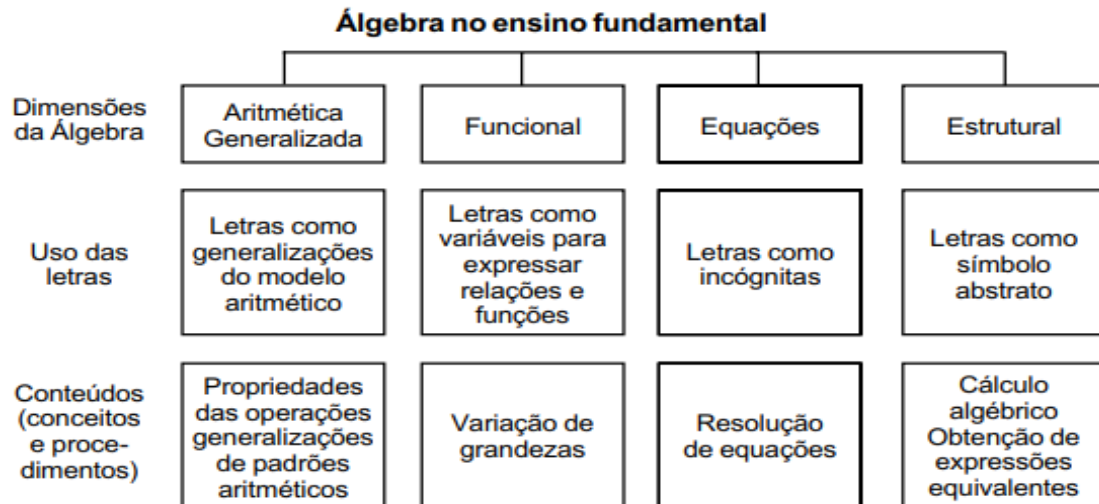


Figura 2: Dimensões da álgebra
Fonte: Brasil (1998), p.116

O autor sugere que a álgebra no ensino fundamental seja abordada nas suas quatro dimensões, onde na dimensão aritmética generalizada, as letras substituem números para generalizar. Na dimensão funcional, as letras assumem uma relação de dependência entre si. Na dimensão de equações, a letra aparece como incógnita que se procura de forma a tornar a condição numa proposição verdadeira. Já na dimensão estrutural, a letra aparece como símbolos abstractos.

1.4- Definição de Padrões

O termo padrão na língua portuguesa, está associado a regularidades, remetendo o primeiro para a unidade de base que eventualmente se repete, de forma constante, ou obedecendo uma lei de transformação. A Matemática usa este termo para mostrar a relação que se estabelece entre os diversos objectos, o que é comum entre eles ou o que os liga.

Em Angola, o conceito padrão começa a ser explorado já no ensino primário e vai até a 11.^a Classe, mas que na opinião do autor, é preciso que se explore mais em diferentes objectos, tanto em padrões figurativas ou mesmo numéricos para a generalização.

A exploração de padrões é fundamental para o desenvolvimento das capacidades de raciocínio algébrico.

Neste sentido, é essencial incentivar os alunos a descrever por palavras suas, um padrão e justificar de que forma o continuam ou constroem, a fim de desenvolver a comunicação matemática.

Ponte (2009) defende que o estudo dos padrões e regularidades, devidamente perspectivado, enriquece o currículo da Matemática. Assim o uso de padrões no ensino da Matemática promove uma aprendizagem significativa e leva o aluno a envolver-se mais com a sua aprendizagem em termos de raciocínio.

O autor refere ainda que o processo de investigação abrange três fases:

- ✓ Procura de padrões – extracção da informação relevante;
- ✓ Reconhecimento do padrão – descrição do mesmo através de métodos diferentes a análise dos aspectos matemáticos;
- ✓ Generalização do padrão – interpretação e aplicação do que se descobriu à diferentes elementos.

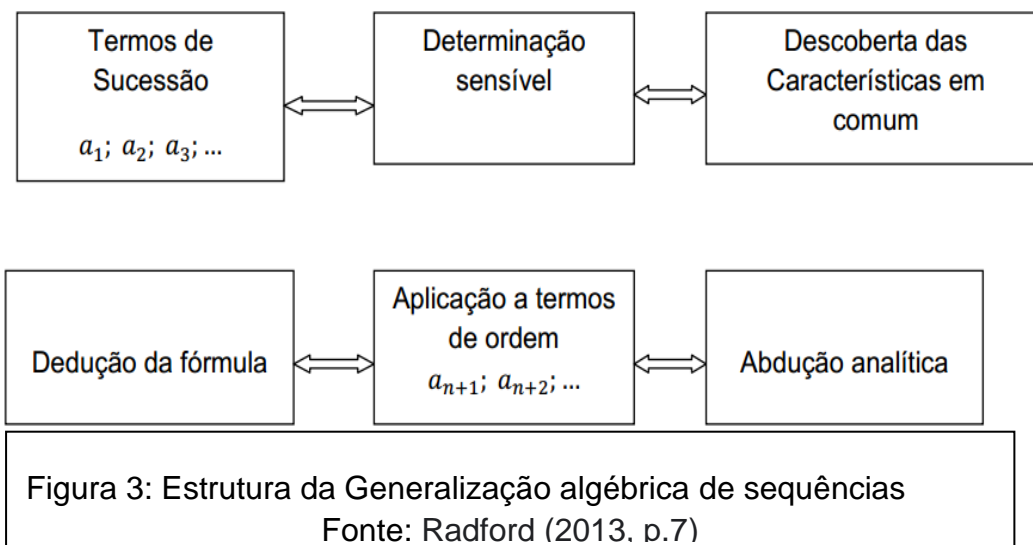
1.4.1- Generalização algébrica e generalização aritmética de padrões no estudo de sucessões

A generalização de padrões pode ser vista como uma das formas mais importantes no tratamento de sucessões nas escolas, tal como refere (Rivera & Becker, 2009). Entre outros aspectos, possibilita o estabelecimento de processos necessários para o desenvolvimento do raciocínio algébrico, ou seja generalização de padrões em sucessões sugere especificar pelo menos dois tipos de generalização: algébrica e aritmética.

Segundo Radford (2013), a generalização algébrica de padrões em sequências implica:

- ❖ Identificar uma semelhança ou característica em comum, observada em todos os termos conhecidos na sequência;
- ❖ A generalização da regra observada e que é comum para todos os termos da sequência em consideração. Quer dizer que considerando a sequência: $u_1; u_2; u_3; u_4; u_5 \dots$ a característica observada para o surgimento do segundo termo, deve ser a mesma para o terceiro termo, para o quarto termo e assim sucessivamente;
- ❖ A capacidade de usar essa característica comum para derivar uma expressão directa que permita obter qualquer termo da sequência, isto

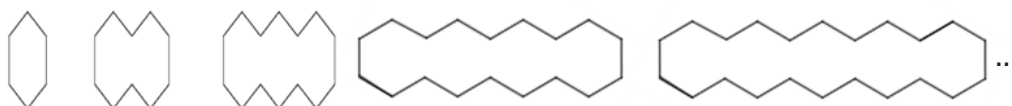
é, o termo que é a generalização da sequência, deve ser capaz de satisfazer todos os termos da sucessão.



A estrutura apresentada acima, mostra a generalização algébrica de uma sucessão, onde a existência de alguns termos particulares é de capital importância para a generalização, observar as características particulares dos termos da sucessão e concluir as características comuns. Feito este processo, pode-se deduzir uma fórmula a partir das características observadas e que são comuns. A fórmula deduzida deve satisfazer também os termos de ordem $n + 1$, $n + 2$ assim sucessivamente. Por outro lado o autor indica que é preciso fazer uma abdução analítica que é a lógica de uma verdade procurada verificando se a generalização obtida é uma verdade ou uma falsidade.

Generalizar o que é comum a todos os termos de uma sucessão, é obter o que em virtude do qual os termos se mantêm unidos, em outras palavras, a generalização algébrica de um modelo se baseia em perceber o que é comum e o que deve ser generalizada para todos os termos da sequência ou que serve de comando na construção de expressões que possibilitam a obtenção de todos os termos da sequência sem exceção, mesmo aqueles que permanecem fora do campo perceptivo. De acordo com No processo de generalização de padrões, é possível identificar casos de produções matemáticas que não apresentam as características da definição de generalização de padrões algébricos tal como referimos acima. Nesse caso, ainda não se entrou no reino da álgebra, continua-se com as operações no reino da aritmética.

Tal como se observou na sequência abaixo, cujos elementos são figuras:



Embora a generalização possa ser verificada e observada em algumas figuras, isso pode não justificar o uso de tais informações para fornecer uma expressão analítica capaz de calcular qualquer termo da sequência, ou seja, quando a abdução é simplesmente usada para passar de um termo para outro (Como é o caso da sequência acima, quando se refere ao facto de que, o padrão consiste em juntar um hexágono a figura anterior, eliminando a aresta em comum). Nesse sentido, estamos diante de uma generalização aritmética, pois a informação é usada apenas para a obtenção do termo precedente. Mas é possível obter uma expressão analítica capaz de indicar o número de arestas de qualquer figura da sequência. Assim estaria perante uma generalização algébrica, pois ter-se-ia uma relação do tipo $u_n = 4n + 2, \forall n \in \mathbb{N}$.

1.5- Raciocínio algébrico segundo uma abordagem ontossemiótica

1.5.1- A abordagem ontossemiótica

A ontossemiótica, provem da aglutinação das palavras Onto de ontologia e semiótica de semiologia. Esta abordagem consiste num marco teórico que pretende articular diferentes pontos de vistas e noções teóricas sobre o conhecimento matemático, seu ensino e aprendizagem. Além disso, também, é um sistema teórico para a investigação em educação matemática, cujos conceitos deste sistema teórico se podem utilizar como ferramentas para identificar e classificar os conhecimentos requeridos para o ensino da Matemática e para analisar os conhecimentos postos em jogo pelo professor (Godino, 2009).

Portanto encara também a Matemática como um sistema logicamente organizado que tem a sua própria linguagem simbólica e se baseia na resolução em colaboração de problemas (Font et al., 2013). A ontossemiótica define amplamente os objectos matemáticos como qualquer entidade que emerge da prática matemática, para uma melhor compreensão, da forma como os objectos matemáticos existem. Vergel (2015) refere que a ontossemiótica examina esses objectos a partir de 5 facetas duplas (Pessoais/institucionais,

Ostensivos/não ostensivos, Extensivo/intensivo, unitários/sistémicos e expressão/conteúdo). Destas facetas interessa este trabalho a dupla faceta extensivo/intensivo. Extensivo é um caso particular e intensivo é de uma forma mais geral. As práticas algébricas de abstracção e generalização estão intimamente relacionadas com esta faceta. A generalização é um processo de gerar um objecto intensivo. Nos padrões relacionados com figuras, o processo de abstracção pode apoiar a generalização, identificando semelhanças e características nos objectos extensivos dados ou conhecidos. (Montiel et al., 2009).

Font et al. (2010) apresentam um conjunto de noções teóricas que compõem o enfoque ontossemiótica classificadas em cinco grupos, cada um dos quais permite analisar aspectos complementares do processo de ensino e aprendizagem da Matemática: sistema de prática; configurações de objectos e processos; configuração didáctica; dimensão normativa; e idoneidade didáctica



Figura 4: Organização em níveis de análise do Enfoque ontossemiótica
Fonte: (Font et al., 2010, p.12)

Os autores, consideram que os quatro primeiros níveis são ferramentas para uma didáctica descritiva e explicativa, enquanto o quinto, que é a idoneidade didáctica, se baseia nos quatro níveis iniciais. A idoneidade didáctica de um processo de ensino e aprendizagem é o grau em que este processo ou parte dele, reúne certas características que permitem qualificá-lo como adequado para conseguir a adaptação entre os significados pessoais alcançados pelos alunos (aprendizagem) e os significados institucionais pretendidos (ensino), tendo em conta as circunstâncias e recursos disponíveis (Breda, et al., 2018).

Nogueira e Neto (2017) identificam seis dimensões de critérios de idoneidade: epistémica (grau de representatividade dos significados institucionais implementados em relação ao de referência), cognitiva (aprecia se os alunos

possuem conhecimentos prévios necessários para o estudo), interacional (identifica como os modos de interação ocorridos no processo permitem identificar e resolver conflitos de significados), mediacional (verificar se são usados materiais necessários que potenciem a introdução e apropriação de diferentes objectos e processos matemáticos), emocional (considerar o interesse das tarefas propostas aos alunos) e ecológica. (Analisar se os significados implementados vão de acordo às orientações curriculares).

O raciocínio algébrico tem sido um assunto bastante relevante para o ensino da Matemática, muitos investigadores interessaram-se no assunto e mostram a sua importância para os níveis primário e secundário. Entre vários autores destaca-se Aké (2013), Godino et al., (2015).

Groenwald e Becher (2010), referem que o raciocínio algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação generalizada para a resolução de problemas, efectuar operações e análises matemáticas de situações tendo como referências, ideias básicas e conceitos algébricos.

O raciocínio algébrico envolve a representação, generalização e formalização de padrões e regularidades em qualquer aspecto da Matemática. Para Godino et al. (2014) na medida em que RA se desenvolve, progride - se na utilização da linguagem e do simbolismo necessários para apoiar e comunicar o pensamento algébrico, em especialmente em equações e funções.

Silva (2011) define o raciocínio algébrico como o que promove:

- Estabelecimento de relações;
- Utilização de diferentes notações para uma mesma situação - problema;
- Estabelecimento de regularidades;
- Algum processo de generalização;
- Compreensão de propriedades matemáticas importantes como, por exemplo, a comutatividade na adição, agrupamento, classificação, ordenação etc.

Saraiva e Teixeira, (2009), referem ainda que o raciocínio algébrico envolve:

- A capacidade de cálculo;
- A capacidade de trabalhar com estruturas matemáticas usando os símbolos algébricos na resolução de problema;
- A capacidade de generalizar.

O exercício abaixo, é um exemplo típico de tarefas de sucessões, que podem auxiliar no desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos em sala de aulas.

Na sequência de figuras, encontre um padrão que possibilite a obtenção da próxima figura.



Nesta sequência, o aluno deve usar o raciocínio até perceber o padrão. Deve verificar que a sequência começa com um triângulo, depois surge retângulo, círculo, retângulo, triângulo, retângulo, círculo, ... ou seja o retângulo está sempre presente antes da repetição da sequência, permitindo deste modo, dar continuidade a ela indefinidamente (ou até onde se pretender).

O papel do professor neste sentido, deve sentar-se na promoção de ambientes de aprendizagem adequados para o desenvolvimento do raciocínio algébrico (que não se desenvolve sozinho ou com memorização de fórmulas) é preciso que se crie processos que levam o aluno a usar raciocínio, através de problematizações, que estimulem a curiosidade, e fazer descobertas, inspirando-os a querer saber mais e mais. Para desencadear esse ambiente, a intencionalidade didáctica é factor fundamental. Vejamos alguns exemplos de perguntas a partir do exemplo de sequência com as figuras geométricas apresentado e que podem ajudar o aluno no raciocínio:

- Qual é a figura que está desenhada na quinta posição? Qual vem em seguida?
- Qual será a figura que devemos desenhar na 10.^a posição? Como descobriram? O que fizeram para dizer que é essa e não a outra?
- Será que é possível descobrir a figura que está na 21.^a posição?

Promover processos que ajudem no desenvolvimento do raciocínio, requer tempo. Tempo este é necessário para que os alunos dialoguem entre si e com o professor, façam perguntas, encontrem possíveis respostas, errem e retomem suas ideias. Enfim, exige uma planificação detalhada e intencional que apoie e explicita o trabalho a ser desenvolvido em sala de aula e, principalmente, a aprendizagem esperada a partir da proposta encaminhada. Nestes casos, os alunos poderão responder as primeiras perguntas tendo

utilizado a contagem ao mesmo tempo em que relaciona a figura na posição. Ao ser solicitado que identifique qual a figura estará na 21.^a posição, depois da descoberta do padrão, é possível responder além de desenhar todas as figuras até 21.^a posição, pode também optar por recorrer ao raciocínio, observando o padrão na sequência. A regularidade presente na sequência está na repetição de três figuras na ordem (triângulo, retângulo, e círculo), mas antes da repetição aparece um retângulo. Com esta regularidade, obter a figura na 21.^a posição sem que se precise desenhar uma a uma, é associar a ideia de múltiplo, ou seja, quantas vezes o padrão se repete até chegar na vigésima primeira posição? O padrão completo (triângulo, retângulo, círculo, retângulo) se repete 5 vezes, e o triângulo é a figura que estará na 21.^a posição.

Uma outra situação pode ser o caso de sequência numérica do tipo 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... onde para se determinar os termos a seguir, é preciso que o aluno seja capaz de estabelecer uma relação entre os termos da sequência, verificar que os dois primeiros termos da sequência são 1 e 2, o terceiro termo é a soma do segundo com o primeiro, o quarto termo é a soma do terceiro com o segundo, o quinto termo é a soma do quarto com o terceiro e assim sucessivamente. Os termos desta sequência podem ser obtidos tendo o aluno o desenvolvimento do raciocínio algébrico, com conhecimentos de processo de recorrência na obtenção de mais termos de algumas sucessões. Neste caso seria:

$$\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}; \forall n \in \mathbb{N},$$

Mas, para o aluno chegar a estas descobertas, é preciso que se faça trabalhos exaustivos no sentido de ajudar-lhe em desenvolver o seu raciocínio algébrico. É importante destacar que com os exemplos apresentados, a marca que se pretende deixar não está nas actividades em si, mas o processo que foi desenvolvido em sala de aulas, que deve consistir em observar padrões, analisar regularidades e generalização. Estas são acções essenciais para promover o desenvolvimento do raciocínio algébrico em qualquer nível de ensino.

Aké (2013) indica que a abordagem ontossemiótica permite caracterizar a Álgebra em termos de tipos de objectos e processos envolvidos na prática matemática. Assim, a actividade algébrica ocorre quando uma pessoa lida com

a solução de certo tipo de problemas ou tarefas, realizando diversas operações.

A autora considera três expressões que podem ser utilizadas em perspectivas diferentes, mas que representam o mesmo objecto que é a Álgebra escolar que parte da abordagem transdisciplinar:

- ✓ Perspectiva epistémica: raciocínio algébrico;
- ✓ Perspectiva semiótica: sentido algébrico;
- ✓ Perspectiva psicológica: pensamento algébrico.

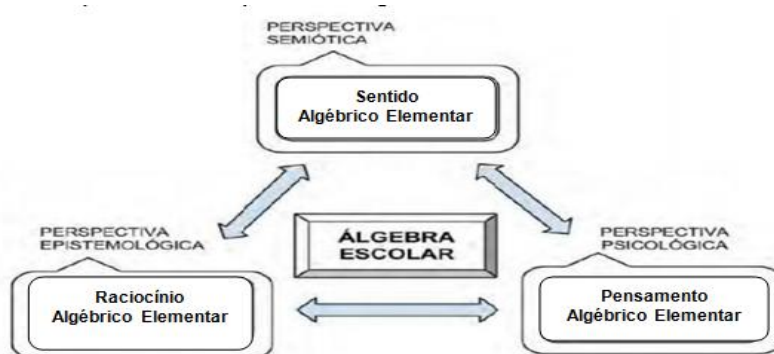


Figura 5:Enfoque transdisciplinar da Álgebra escolar
 Fonte: (Aké, 2013, p.100)

Essas três expressões estão em torno da Álgebra dependentemente da perspectiva e do momento que é tratado. Na perspectiva semiótica, na álgebra surgem símbolos em representação de números, enquanto na perspectiva epistemológica é quando a Álgebra é relacionada com a vida e na perspectiva psicológica, quando é utilizado para medir a mente dos alunos.

1.5.2- Vertentes fundamentais do Raciocínio algébrico

Ponte et al. (2008), enquadram o raciocínio algébrico em três vertentes fundamentais, cujas informações estão resumidas na tabela 1

Tabela 1: Vertentes fundamentais do Raciocínio algébrico

Representar	<ul style="list-style-type: none"> -Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; -Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; -Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
-------------	---

Raciocinar	-Relacionar (em particular, analisar propriedades); -Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; -Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	-Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: Ponte et al. (2008, p.11)

Observa-se aqui um exemplo típico das vertentes do raciocínio algébrico, na pesquisa realizada por Canavarro, relacionados com a generalização em sucessões onde alunos resolveram uma situação denominada por quantos telefonemas?

Cinco alunos ganharam um concurso. Quando souberam da notícia, telefonaram uns aos outros a felicitarem-se. Descubra quantas chamadas tiveram que fazer os cinco amigos para se felicitarem todos entre si... E se fossem seis amigos, quantas chamadas fariam? E se fossem sete amigos, quantas chamadas fariam? Consegues descobrir alguma regra para qualquer número de amigos? (Canavarro, 2007, p. 82).

Este problema foi proposto e resolvido pelos alunos em grupo. Ao fazer análise, a autora começa por dizer que os alunos estavam de facto a resolver uma situação problema cuja resposta era desconhecida e no fim houve a socialização das estratégias utilizadas por eles para se encontrar a resposta apresentada. Um dos grupos:

Optou por recorrer a cores diferentes para distinguir as chamadas realizadas. Em cada caso, desenhou os amigos alinhados, e ligou-os entre si com arcos de cores diferentes, respeitando sempre a mesma ordem [...]. Fez partir do primeiro menino (mais à esquerda) o maior número de arcos possíveis, representando todas as chamadas

telefônicas em que esse menino participou; passou ao segundo menino e desenhou em cor diferente os arcos dirigidos aos meninos representados à sua direita, e assim sucessivamente. O registro do número de chamadas foi, em cada caso, feito também de forma sistemática, através da adição ordenada dos números de chamadas (correspondendo à contagem dos arcos). Ao apresentarem a sua resolução, explicaram: Se desenhou os meninos. Desenhamos de cores diferentes as chamadas que cada um fez. Somamos as chamadas realizadas. E descobrimos uma regra... aumenta-se sempre o número de meninos menos um (Canavarro, 2007, p. 84).

Depois da explicação dada pelos grupos, a professora propôs a construção de uma tabela para relacionar a quantidade de amigos e a quantidade de telefonemas e questionou para as quantidades não referidas no problema. A Professora insistiu continuando a discussão e os estudantes chegaram a concluir que existe uma regra para descobrir o número de chamadas feitas por um qualquer número de estudantes, basta para isso juntar todos os números partindo do número um até chegarmos ao número anterior ao número de alunos (Canavarro, 2007).

Diante da resolução feita por todos os grupos, a pesquisadora observou que os alunos:

Identificaram a estrutura Matemática da situação em análise;
Estabeleceram relações numéricas entre as duas variáveis em causa;
Generalizaram uma regra para a determinação de qualquer termo da sequência, em linguagem natural, justificando-a. Expressaram a generalização de duas formas distintas, por recorrência e através do termo geral (Canavarro, 2007, p. 86).

Para Canavarro (2007), foram produções sofisticadas do ponto de vista do raciocínio matemático, estas são capacidades que o ensino da Matemática

deve proporcionar em qualquer nível do ensino no sentido de poder auxiliar no desenvolvimento da capacidade analítica dos alunos.

Para generalizar é preciso decorrer certas etapas do RA, pois é necessário compreender o padrão de forma generalizada. Para o efeito, o uso de raciocínio algébrico é de fundamental importância. Rojano (2002) destaca quatro etapas do raciocínio algébrico no processo de generalização:

- ✓ Construção mental de regra geradora dos termos de um tema de matemática;
- ✓ Escrita da regra em linguagem corrente;
- ✓ Tradução da regra em simbologia algébrica;
- ✓ Manipulação da generalização.

1.5.3- Os níveis do raciocínio algébrico

O trabalho realizado pelos investigadores Godino et al. (2015) propõe um modelo para caracterizar o raciocínio algébrico para o ensino primário e secundário, onde se distingue um total de sete níveis de raciocínio algébrico, sendo três para o ensino primário e quatro para o secundário, dependendo dos objectos a utilizar e processos que podem intervir na actividade matemática. Para os autores, a definição de níveis de raciocínio algébrico está baseada em distinções de natureza ontossemiótica:

- Presença de objectos algébricos intensivos (ou seja, entidades de carácter geral ou indeterminado);
- Transformações (operações) aplicadas a esses objectos, as quais são baseadas na aplicação de propriedades estruturais;
- Tipo de linguagem utilizada.

Os tipos de objectos e processos algébricos podem ser expressos em diferentes linguagens, preferencialmente alfanuméricas nos níveis mais elevados de álgebra. Mas os alunos nos níveis inferiores de ensino podem também utilizar outros meios de expressão para representar objectos e processos algébricos, de preferência linguagens algébricas.

Os alunos podem também utilizar outros meios de expressão para representar objectos e processos algébricos, em particular a linguagem corrente, gráfica, tabular e mesmo gestual (Radford, 2010).

Traz-se aqui a distinção de certas características existentes na prática para a resolução de tarefas matemáticas, que podem ser abordadas tanto nas escolas primárias, ou secundárias. Estas características permitem definir diferentes níveis de RA, tal como consta no trabalho Suharman (2018)

✓ Nível zero de RA (ausência de raciocínio algébrico)

Este é o nível onde o raciocínio algébrico é praticamente inexistente, pois as tarefas que são tratadas não incluem características algébricas nas suas respostas. Aqui são realizadas apenas operações com objectos intensivos (particulares), expressos através de linguagens naturais, linguagens numéricas, icónicas ou gestuais. Podem estar envolvidos símbolos que remetem para um valor desconhecido, mas este valor é obtido como resultado de operações sobre objectos particulares. Nas tarefas de generalização, o simples reconhecimento da regra recursiva que relaciona um termo com o seguinte, em casos particulares, não é indicativo de generalização.

Exemplo: Calcular o termo em falta: $150 - 30 = \underline{\quad}$

Trata-se portanto de uma actividade puramente aritmética, o termo em falta é obtido pelo algoritmo de subtração, onde o sinal de igualdade exprime o resultado da operação e nada mais.

✓ Nível um de RA (Inicial)

As tarefas neste nível, são aquelas cujas respostas requerem apenas conhecimentos das propriedades de estruturas algébricas num conjunto numérico definido. A igualdade é usada como equivalência de expressões e intervêm objectos intensivos cuja generalidade recorre a uma linguagem natural, numérica, simbólica, podendo recorrer a imagens. Em tarefas estruturais, podem aparecer dados desconhecidos, expressos em forma de símbolos, e serem aplicadas relações e propriedades de operações. Em tarefas funcionais, recorre-se ao cálculo com objectos extensivos.

Exemplo: Determine o valor em falta, preenchendo o espaço vazio

$5 + 11 = 11 + \underline{\quad}$

Na resolução desta tarefa, é possível não envolver qualquer operação, usar apenas o conhecimento que se tem da propriedade comutativa da adição em \mathbb{N} da seguinte forma: $5 + 11 = 11 + 5$. Logo, o valor em falta é 5.

✓ Nível dois de RA (Intermédio)

As tarefas deste nível, envolvem indeterminações ou variáveis expressas em linguagem simbólico - literal para se referir intensivos reconhecidos, embora ligadas à informação do contexto espacial ou temporal. Para referir os intensivos reconhecidos, embora ligados à informação do contexto espaço-temporal. Nas tarefas estruturais, as equações são da forma $Ax \pm B = C$, com $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Nas tarefas funcionais, a generalidade é reconhecida, mas as variáveis não são operadas para obter formas canónicas de formas canónicas de expressões.

Exemplo: Uma caixa mágica dobra o número de moedas que se coloca nela, mas depois de usada, deve-se pagar 4 moedas. O João tentou e colocou as suas moedas na caixa e elas efectivamente dobraram. Ele pagou 4 moedas e tentou novamente. Eles voltaram a dobrar, mas ao pagar as 4 moedas, ele ficou sem dinheiro. Quantas moedas teve o João no começo? (Adaptado de Godino et al., 2014, p.12).

Esta tarefa pode ser interpretada de maneiras seguintes:

1.^a Por tentativa: o João não deveria começar com apenas uma moeda, pois ao dobrar teria apenas duas moedas o que seria impossível pagar quatro moedas. Pode-se supor que o João começou o jogo com duas moedas, ao dobrar teria quatro moedas pagaria quatro e já não teria moeda para voltar a introduzir na caixa. Agora supondo que começou com 3 moedas, ao dobrar teria 6 moedas, pagaria 4 e sobrava com 2. Ao voltar a introduzir, receberia quatro e pagava quatro.

Resolvendo desta maneira, não envolveria qualquer nível de RA, resolveu-se com valores particulares das variáveis que a tarefa envolve e usou-se operações aritméticas;

2.^a Como é desconhecido o valor inicial que o João tinha, então supõe-se que ele começa com n , ao dobrar teria $2n$, pagaria 4 e restava com $2n - 4$. Voltou a jogar e a caixa voltou a dobrar e ficou com $2(2n - 4)$ e ao pagar 4, ficou sem moedas, isto é, $2(2n - 4) - 4 = 0$. Dai tem-se:

$4n - 8 - 4 = 0$, Então $n = 3$. Nesta forma de resolver, o valor que era desconhecido, obteve-se por meio de uma equação do tipo: $an + b = c$, portanto é de nível 2 pelas características apresentadas.

✓ Nível três do RA (consolidação)

Neste nível, as soluções apresentadas são obtidas por meio de incógnitas e variáveis com o uso das propriedades estruturais. As tarefas, envolvem indeterminações ou variáveis expressas em linguagem simbólica - literal para se referir os intensivos reconhecidos, embora ligadas à informação do contexto espacial. Nas tarefas estruturais, as equações são da forma $AX + B = CX + D$, com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ e a formulação simbólica e descontextualizada de regras canônicas de funções e padrões.

Exemplo: Um aluno fez a seguinte conjectura: “Adiciono três números naturais consecutivos. Se eu dividir o resultado por três, obtenho sempre o segundo número”. Esta afirmação é válida para todos os números naturais? Justifique? (Adaptado de Suharman, 2018, p.61)

Esta tarefa pode resolver-se de maneiras diferentes, envolvendo diferentes níveis do RA, mas pretende-se aqui dar uma resolução que esteja enquadrada com o nível 3.

Solução: Considere a expressão n como o primeiro, então os outros dois números são $n + 1$, $n + 2$

Então pode-se escrever os números consecutivos como: $n, n + 1, n + 2$

$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$ ao dividir o número por 3 ficaria, $\frac{3(n + 1)}{3} = n + 1$ que na verdade é a expressão representativa do segundo número natural, logo afirma-se que a conjectura é correcta e válida para todos os números naturais.

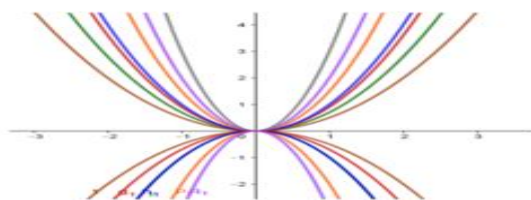
Nesta solução, a representação de um número natural por uma letra que pode tomar qualquer número natural como valor, envolvendo tradução de linguagem natural para linguagem literal simbólica, transformação de expressões algébricas (variável n como inscrição sintáctica). Esta solução é considerada de nível 3 do RA pelo facto de envolver símbolo algébrico que é o caso de n , realizar operação algébrica (neste caso é em forma geral), e envolvimento da Álgebra estrutura do tipo $An \pm B = Cn \pm D$, com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

✓ Nível quatro do RA (utilização de parâmetros).

Este é considerado como o primeiro nível para o ensino secundário, portanto aqui o conhecimento de parâmetros e coeficientes de variáveis, torna-se essencial e de capital importância para a resolução de tarefas, mas não há aqui operações com parâmetro. Sendo assim, as actividades matemáticas que envolvem o nível 4 são, por exemplo, o estudo de uma família de funções ou equações tendo em conta os seus parâmetros.

Exemplo: Considere a família de funções definida pela expressão $y = Px^2$, onde a é um parâmetro real diferente de zero. Para que valores de P , a função tem a concavidade voltada para baixo. (Adaptado do Suharman, 2018, p.62)

Figura 6: Gráfico de algumas funções da família de Funções quadrática



Fonte: Adaptado pelo próprio autor

Pode-se notar na representação gráfica acima, o sentido da concavidade depende do valor a ser atribuído ao parâmetro P , isto é para $P > 0$, a concavidade voltada para cima, para $P < 0$, a concavidade voltada para baixo. No que mostra que o sentido da concavidade, depende do sinal do parâmetro P . em suma, esta actividade requer a interpretação do papel do parâmetro P para identificar propriedades da família de funções, mas não requer cálculos com o parâmetro para produzir outros objectos ou relacionamentos. Por isso considera-se do Nível 4.

✓ Nível cinco do RA (tratamento de parâmetros).

Suharman, (2018), trata este como o mais elevado do RA e que está ligado à actividade matemática de implementar e executar cálculos analíticos, envolvendo um ou mais parâmetros, juntamente com outras variáveis. As operações com parâmetros e o estabelecimento de relações entre eles implicam um nível mais elevado de complexidade semiótica, dado que os objectos intervenientes e emergentes desses sistemas de práticas colocam em jogo os objetos algébricos do nível anterior (família de equações, família de funções).

Assim, as respostas enquadradas neste nível apresentam a operacionalidade entre parâmetros.

✓ Nível seis do RA (Nível Complexo)

Este é considerado como um nível de elevada complexidade. Envolve o estudo de estruturas algébricas onde se encontra definições e propriedades estruturais. É neste nível que se começa com o estudo e vectores (Operações). Estes níveis que foram abordados não são atribuídos em tarefas em si, mas às actividades matemáticas que são realizadas. Em função da forma como uma tarefa é resolvida, a actividade matemática pode ser classificada num certo nível. Não se trata, portanto, de níveis exclusivamente matemáticos (centrados na tarefa), mas sim da forma como a actividade matemática é realizada.

A tabela 2 abaixo, resume a distinção dos sete níveis do RA no ensino primário e Secundário, segundo Godino et al. (2015).

Tabela 2: Os níveis do RA para o ensino primário e Secundário.

Nível 0 (Raciocínio algébrico elementar para o ensino básico)	
Objectos	- Não envolve objectos intensivos; - Nas tarefas estruturais podem envolver-se dados desconhecidos.
Transformações	Opera-se com objectos extensivos.
Linguagem	- Natural, numérica, icónica, gestual; - Podendo envolver símbolos que se referem aos objectos extensivos ou dados desconhecidos.
Nível 1 (Raciocínio algébrico elementar para o ensino básico)	
Objectos	- Nas tarefas estruturais pode envolver -se dados desconhecidos; - Nas tarefas funcionais reconhecem-se os intensivos.
Transformações	- Nas tarefas estruturais aplicam-se relações e propriedades das operações; - Nas tarefas funcionais opera-se com objectos intensivos
Linguagem	Natural, numérica, icónica gestual; podendo envolver símbolos que referem aos objetos intensivos conhecidos
Nível 2 (Raciocínio algébrico elementar para o ensino básico)	
Objectos	Envolve objectos indeterminados ou variáveis
Transformações	- Nas tarefas estruturadas as equações são da forma $Ax + b = C$, com $A, B, C \in \mathbb{R}$ - Nas tarefas funcionais a generalidade é reconhecida mas não se opera com variáveis para obter a forma canónica de expressões algébricas.
	Simbólica - literal, usada para referir os intensivos reconhecidos,

Linguagem	ligados às informações do contexto espacial e temporal usadas para se referir a intensivos reconhecidos, embora ligada à informação espacial, temporal e contextual.
Nível 3 (Raciocínio algébrico elementar para o ensino básico)	
Objectos	Envolve objectos indeterminados ou variáveis
Transformações	- Nas tarefas estruturadas, as equações são da forma: $Ax \pm B = Cx \pm D$; com $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ -Opera-se com objectos indeterminados ou variáveis
Linguagem	Simbólica - literal, os símbolos são usados analiticamente, sem referências às informações do contexto
Nível 4 (Raciocínio algébrico para o ensino secundário)	
Objectos	Variáveis, incógnitas e parâmetros; Famílias de equações e funções (Objectos intensivos com um maior grau de generalidade)
Transformações	Ocorrem operações com variáveis, mas não com parâmetros.
Linguagem	Simbólica - literal; os símbolos são usados analiticamente, sem referir a informações contextuais
Nível 5 (Raciocínio algébrico para o ensino secundário)	
Objectos	-Variáveis, incógnitas e parâmetros; - Famílias de equações e funções (Objectos intensivos com um maior grau de generalidade)
Transformações	Existem operações com os parâmetros e, portanto, com objetos com um maior grau de generalidade
Linguagem	Simbólica - literal; símbolos são usados analiticamente, sem referir a informações contextuais.
Nível 6 (Raciocínio algébrico para o ensino secundário)	
Objectos	Estruturas algébricas; envolve objectos abstractos (espaços vectoriais, grupos, anéis, ...) Relações binárias Gerais e as suas propriedades (Objectos intensivo com quarto grau de generalidade)
Transformações	Existem operações com objetos abstractos que formam partes das estruturas algébricas
Linguagem	Simbólico - literal; os símbolos são usados analiticamente sem referir a informações contextuais ou não.

Fonte: Godino et al. (2015)

Os níveis de RA que são desenvolvidos nas actividades matemáticas podem ajudar na tomada de consciências sobre o processo de generalizações, simbólicos bem como na modelação estrutural, funcional e cálculo analítico e permitem a criação de ligação significativa entre o raciocínio algébrico nos

níveis de ensino e o conhecimento Didáctico Matemático do Professor, pode ajudar de tal maneira na identificação das características de práticas matemáticas que podem aumentar gradualmente os níveis do RA dos alunos. Analisando os exemplos dados acima referentes ao RA e pelo estado actual dos alunos, fica patente que para existir desenvolvimento do RA tanto no ensino primário como secundário, é imprescindível que a organização do trabalho pedagógico seja intencional. Isto é, deve existir clareza na escolha das actividades, a mediação do professor, o levantamento de hipóteses e à sistematização de conhecimentos produzidos na sala.

1.6- Análise do Programa de Matemática da 11.ª Classe das escolas de Formação de Professores em Angola

A Álgebra se constituiu ao longo do tempo como a linguagem da Matemática, e se por um lado, passou a ser um tema considerado como requisito básico na formação de um estudante e cidadão, Por outro, tornou-se, um meio de exclusão social, devido às dificuldades que muitos alunos têm em trabalhar, principalmente com o simbolismo algébrico.

Etimologicamente, a palavra currículo, tem a sua proveniência do verbo latino “currere”, transporta a ideia de caminho ou trajectória, itinerário, vivências e remete-se para as noções de sequencialidade e de totalidade (Pacheco & Pereira, 2007).

A formação de professores constitui um processo que implica uma reflexão permanente sobre a natureza e os objectivos a serem alcançados, sobre como se encara o ensino e o significado de ser professor num determinado contexto. Gungula e Faustino (2018), mostram que apesar dos investimentos feitos pelo Governo, o ensino de Formação de Professores do I ciclo em Angola, ainda apresenta-se com muitas fragilidades em relação à seriedade que se pretende da prática educativa, e esta fragilidade apresenta-se principalmente na carência de professores especializados e qualificados, a questão das infra-estruturas para o ensino se mostrarem instáveis e a falta de laboratório apetrechados. Considera-se ainda que é dada pouca importância à preparação dos alunos para o exercício da docência, as turmas são numerosas, dificultando deste modo a tarefa docência. No âmbito das pesquisas feitas a respeito do currículo de Matemática para as escolas de Formação de

Professores do I ciclo em Angola, a álgebra é ensinada do começo ao término do ciclo e o ensino de sucessões, deveria assentar-se no trabalho com o raciocínio dos alunos na identificação de padrões e na obtenção de termos gerais.

Ao começar o estudo da Álgebra, o professor deve compreender e encará-la como uma aritmética generalizada de forma a traduzir as propriedades aritméticas das duas principais operações básicas em propriedades algébricas, para que os alunos consigam compreender com mais rapidez e eficácia todas as concepções da álgebra.

O facto do ciclo completo do ensino secundário, constar conteúdos algébricos, leva a acreditar que os alunos deveriam possuir um raciocínio algébrico bastante apurado. Mas a Álgebra é uma linguagem da Matemática que utiliza símbolos (variáveis e incógnitas), as operações e as propriedades da aritmética para expressar generalizações. A presença da Álgebra no ensino secundário é útil para o desenvolvimento do pensamento racional, ou seja, pretende-se que através de situações matemáticas os estudantes possam identificar padrões, analisar regularidades, fazer generalizações, enfim.

Segundo Van de Walle (2009), para se formar generalizações deve-se partir de experiências com números e operações (Aritmética) que permitam aos estudantes identificar padrões e regularidades em sequências de números ou figuras, em processos de cálculos mentais ou formais e compreendam que padrões e regularidades envolvendo números e operações são conhecimentos estruturantes para as propriedades dos números e das operações. O autor acrescenta e reforça que longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o raciocínio algébrico permeia toda a Matemática e é essencial para torná-la útil na vida quotidiana.

Nos anos iniciais do ensino secundário, o desenvolvimento do raciocínio algébrico requer que se trate de modo intencional essa forma particular de raciocinar, questionando aos alunos a partir da observação, da identificação de padrões que se repetem de forma organizada, da análise de regularidade e realização de generalizações. A generalização assume um papel central no desenvolvimento do raciocínio algébrico. Dá uma afirmação que descreve uma verdade geral sobre um conjunto de dados. Isto é, os alunos precisam vivenciar situações que envolvam a análise do que é comum entre essas

situações, identificarem a existência ou não de uma regularidade ou entre seus procedimentos.

A Álgebra actualmente tem como característica, possuir como seu foco o estudo de relações matemáticas abstractas, incluindo fórmulas, equações e inequações, estudando também, conjuntos numéricos e não numéricos, além da resolução de problemas com as quatro operações básicas, presentes em diferentes ambientes.

Lins e Gimenez (1997), citados por Groenwald e Becher (2010) entendem que a actividade algébrica é caracterizada pela resolução de problemas de Álgebra, independentemente de serem contextualizados ou não. Consideram também que toda actividade algébrica possui quatro características:

- ❖ Conteúdos;
- ❖ Notação;
- ❖ Acção do raciocínio;
- ❖ Campo conceitual.

Para esses autores a actividade algébrica resulta da acção do pensamento formal, assim o pensamento formal algébrico.

Verifica-se que a Álgebra nas escolas de Formação de Formação de Professores está sendo muito pouco explorado, pois servem basicamente no ensino de memorização de fórmulas e de procedimentos sem que se apresente uma relação óbvia com outros conhecimentos ajudando assim os alunos no desenvolvimento do intelecto.

Lourenço et al., (2014) identifica competências matemáticas que as escolas devem desenvolver nos alunos das quais destaca-se: a predisposição e aptidão para raciocinar algebricamente, a procura de regularidades, ensaiar estratégias alternativas de resolução de problemas, formular generalizações, fazer e testar conjecturas, pensar de maneira lógica, despertar o gosto e a confiança pessoal para desenvolver actividades intelectuais que envolvam raciocínio matemático.

Em Angola, é da competência exclusiva do Estado a elaboração do programa, cabendo-lhe a definição das normas gerais de Educação, nomeadamente nos seus aspectos pedagógicos técnicos de apoio e de fiscalização do seu cumprimento. Assim, o programa é definido como um documento do Estado e de cumprimento obrigatório e nele estão contidos os objectivos, a descrição

detalhada dos conteúdos a tratar. Queria e Barros (2020) definem o programa da disciplina como o documento que permite organizar e detalhar o processo pedagógico. Orienta o professor no que se refere ao conteúdo que se deve transmitir e como ele deve desenvolver as actividades para o alcance dos objectivos (p.68)

Para INIDE (2013), Angola pretende formar professores que possuam conhecimentos técnicos, científicos e metodológicos de forma a desenvolver o pensamento racional, indutivo e dedutivo.

O tema sequências nas Escolas de Formação de Professores de Angola, é tratado na décima primeira classe. Segundo (Ponte et al., 2008), esses conhecimentos deveriam ter como principal objectivo contribuir para o desenvolvimento do raciocínio algébrico dos alunos. Para estes autores, os conceitos fundamentais e aspectos da aprendizagem das sequências e regularidades dividem-se em:

- ✓ Sequências pictóricas;
- ✓ Sequências numéricas.

Na análise de uma sequência pictórica identifica-se as regularidades e descreve-se características locais e globais das figuras que a compõem ou ainda também da sequência numérica que lhe está directamente associada. O trabalho com sequências pictóricas e com sequências numéricas finitas ou infinitas (estas últimas chamadas sucessões) envolve a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações. Em Angola, os programas de Matemática das escolas de Formação de Professores, o conceito sucessão não é totalmente novo para os alunos, pois no primeiro ciclo, trata-se deste conceito, apesar de ser dado com menor profundidade. No primeiro ciclo são observados padrões e regularidades de apenas números de uma forma essencialmente empírica. Já nas escolas secundárias, a sequência pictórica não é tratada, limitando-se simplesmente em sequências numéricas, mas também com bastantes limitações. Um dos objectivos gerais da 11.^a Classe nas Escolas de Formação de Professores em Angola, é de traduzir a linguagem comum em linguagem algébrica, para comunicar ideias. Por isso é preciso que se trabalhe muito bem o desenvolvimento do raciocínio dos alunos para que os mesmos possam desenvolver como se recomenda. No programa da 11.^a Classe, encontra-se na Unidade IV, o tema Sucessões. Aplicações de

\mathbb{N} em \mathbb{R} com subtemas. A tabela abaixo, mostra com mais detalhes como é abordado a unidade

Tabela 3: Conteúdos relativos ao tema Sucessões.

Subtema	Objectivo Específico
4.1- Definição de uma Sucessão. Termo de uma Sucessão	-Definir sucessão; -Identificar termos da sucessão
4.2- Sucessão numérica como caso particular de função	-Definir sucessão numérica
4.2.1- Sucessão recorrente	-Determinar termos de sucessão recorrente
4.2.2- Sucessões monótonas e Finitas	-Definir sucessões monótonas; -Definir sucessões finitas.
Progressão Aritmética	-Definir PA; -Determinar o termo geral da PA; -Determinar a Soma dos n primeiros termos da PA; -Estabelecer a relação entre dois termos da PA.
Progressão geométrica	-Definir PG; -Determinar o termo geral da PG; -Determinar a Soma dos n primeiros termos da PG; -Estabelecer a relação entre dois termos da PG.
Fonte: INIDE (2013)	

Como se pode verificar no programa curricular de Matemática disponibilizado pelo Ministério de Educação, o estudo de sucessões nas Escolas de Formação de Professores, baseia-se na obtenção e na utilização de fórmulas de termos gerais, da soma dos n primeiros termos e na relação existente entre dois termos de progressões Aritméticas e/ou Geométricas, o que no nosso entender não ajuda muito no desenvolvimento do RA dos alunos para determinar o termo geral de outras sucessões e conseqüentemente não ajuda muito na capacidade analítica como orienta o Ministério de Educação. O sistema de tarefas aqui é feito descobrindo de que sucessão se trata (Progressão Aritmética ou Geométrica) para de seguida aplicar a respectiva fórmula. É claro que este sistema de tarefas não ajuda muito para quem pretende trabalhar o

desenvolvimento do raciocínio, mas leva os alunos na memorização de fórmulas sem no entanto que se garanta um desenvolvimento do raciocínio algébrico, e conseqüentemente o desenvolvimento do pensamento racional tal como orienta o Ministério.

1.7- Conceitos matemáticos fundamentais envolvidos nas sucessões

Uma Sucessão real é uma função real de variável natural, isto é, uma função que tem como domínio o conjunto dos números naturais (\mathbb{N}) e imagens números reais. Às imagens chamam-se termos da sucessão. O objecto de cada termo chama-se ordem desse termo. Como é um número natural, é habitual designa-lo pela letra n .

Seja u_n a sucessão tal que $u_n = f(n)$, onde f é uma função numérica. Se n é definido no domínio de f , então o termo geral também o é. Daí a razão pela qual se está a designar a sucessão de função, pois $f(n)$ neste caso será uma restrição da função polinomial.

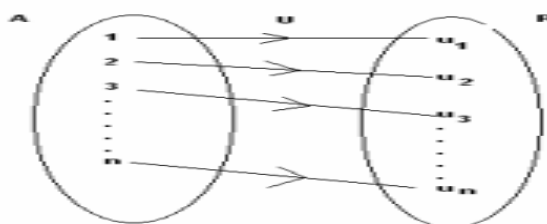


Figura 7: Relação de correspondência entre dois conjuntos
Fonte: Próprio Autor

Uma sucessão é normalmente designada por letras minúsculas e a ordem de qualquer termo é representada em índice. Seja a sucessão $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, então temos: $f(1) = u_1$ $f(2) = u_2$ $f(3) = u_3$. . . $f(n) = u_n$

Podemos assim dizer que os termos da sucessão são:

$u_1; u_2; u_3; u_4; \dots u_n; u_{n+1}; \dots$ Onde:

u_1 : é o primeiro termo;

u_2 : é o segundo termo;

...

u_n : é o termo de ordem n ou termo geral da sucessão.

Formas de definir uma sucessão

Uma sucessão pode ser definida pelo seu termo geral ou por um processo de recorrência.

- Sucessão definida pelo termo geral

É dada uma expressão algébrica, a partir da qual, todos os termos da sucessão podem ser obtidos. Por exemplo, a sucessão dada pelo termo geral $a_n = 3n - 4$, pode ser obtido qualquer termo da sucessão, basta substituir a variável n pela ordem pretendida.

- Sucessões definidas por recorrência

Os demais termos da sucessão são obtidos a partir dos primeiros termos já conhecidos. Por exemplo, a sucessão 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ... Pode ser definida por recorrência da forma seguinte:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Esta sequência é a famosa sequência de Fibonacci, que foi abordada com mais detalhes em [1.8]

Termos gerais de algumas sucessões importantes

Destaca-se os termos gerais de algumas sucessões que são consideradas como fundamental e de base para o aprendizado

- ✓ Sucessão dos números naturais: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; ... n , $\forall n \in \mathbb{N}$
- ✓ Sucessão dos números pares: 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; ... $2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- ✓ Sucessão dos números ímpares: 1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; ... $2n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- ✓ Sucessão constante (é a sucessão cujos termos são todos iguais):
5; 5; 5; 5; ...; 5; ... 5, $u_n = 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- ✓ Sucessão quase constante: é a sucessão cujos termos, a partir de uma certa ordem são todos iguais tal como:

1; 3; 5; 7; 9; 3; 3; 3; 3; 3; 3; ... 3; ... 3.

Esta sucessão é definida por ramos da seguinte forma:

$$u_n = \begin{cases} 2n - 1 & \text{para } n \leq 5 \\ 3 & \text{para } n > 5 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Gráfico de Sucessões

O gráfico de uma sucessão é constituído pelo conjunto de pontos isolados, de coordenadas $(n; a_n)$ com $n \in \mathbb{N}$. Como o domínio é constituído pelos naturais, podemos então afirmar que uma sucessão é a restrição da função real de variável real ao conjunto dos naturais. Por exemplo a sucessão dos números triangulares cujo termo geral é dado pela expressão $\frac{n(n+1)}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ é uma restrição da função real $f(x) = \frac{x(x+1)}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, tal como mostra a figura 8 abaixo:

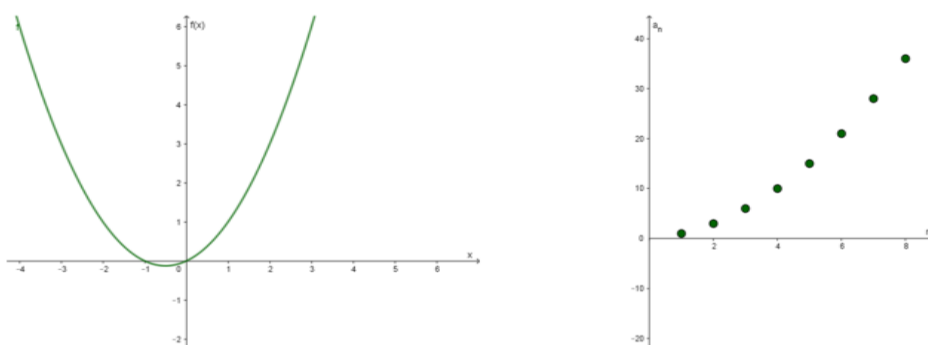


Figura 8: Diferença entre uma função real de variável real e a sua restrição em natural

Fonte: Adaptado pelo próprio autor

1.8- Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é a sequência numérica proposta pelo matemático Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci. Esta sequência é dada por: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; ...

Foi a partir de um problema criado por Leonardo de Pisa que se observou a existência de uma regularidade matemática. Problema este que é o exemplo do clássico dos coelhos onde o Leonardo de Pisa descreve o crescimento de uma população desses animais. O padrão para a obtenção de todos os termos da sequência é o seguinte. Começa pelo 1, os termos seguintes são obtidos pela soma dos dois termos precedentes. No caso do segundo termo, é repetido 1, pois tem apenas um termo que o antecede, isto é:

$$F_1 = F_2 = 1$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$

$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$$

$$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$$

$$F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = 21$$

...

Esta sequência é definida por recorrência pela expressão algébrica

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}; \forall n \geq 3 \end{cases} \text{ ou ainda } \begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

A verdade é que esta sequência pode ser percebida na natureza. É só observar as folhas das árvores, as pétalas das rosas, os frutos como o abacaxi, etc., Num girassol, por exemplo, as sementes formam espirais que estão organizados como sequências de números de Fibonacci.

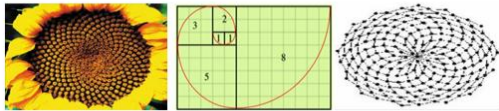








Figura 9: Girassol e o Espiral das suas sementes

Fonte: Manual do aluno, disciplina de Matemática, 11.º ano de Escolaridade, Timor-Leste (p.11)

Tabela 4: Números de pétalas de algumas flores

Espécie de flor (presente em Angola)	n.º de pétalas	Espécie de flor (presente em Angola)	n.º de pétalas
	5	 Welwitschia Mirabilis	13
 Flor de Múcuca	5	 Welwitschia Mirabilis	2
 Flor de maracujá	8		8

Fonte: Imagens fotográficas: Algumas flores e plantas existentes em Angola

1.9- Progressão Aritmética

Progressão Aritmética é toda sequência de números reais em que a diferença entre um termo qualquer (a partir do segundo) e o termo que o antecede é sempre uma constante, (Iezzi et al., 2007, pp.133-138). Essa constante é chamada de razão da PA e é usualmente representada pela letra r . Dependendo do sinal da razão, a Progressão Aritmética é uma sequência monótona e pode classificar-se em:

- ❖ Crescente: $r > 0$, $(u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < \dots < u_n < u_{n+1} \dots)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- ❖ Decrescente: $r < 0$ $(u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > \dots > u_n > u_{n+1} \dots)$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- ❖ Constante: $r = 0$ $(u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \dots = u_n = u_{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Pode-se verificar ainda que com uma quantidade ímpar de termos, o termo médio pode ser determinado pela média aritmética entre o primeiro termo e o último termo.

De acordo com a definição da Progressão Aritmética, é possível obter o seu termo geral, conhecendo apenas o primeiro termo e a razão. Que pode ser deduzida da forma seguinte:

Seja dada u_1 e r o primeiro termo e a razão da PA, respectivamente, então pela definição, tem-se

$$u_1 = u_1 + (1 - 1)r$$

$$u_2 = u_1 + (2 - 1)r$$

$$u_3 = u_1 + (3 - 1)r$$

$$u_4 = u_1 + (4 - 1)r$$

...

$$u_n = u_1 + (n - 1)r, \forall n \in \mathbb{N}$$

Relação entre dois termos da PA

Dois termos quaisquer de uma Progressão Aritmética (de ordem p e k) estão fortemente relacionados pela expressão:

$$u_p = u_k + (p - k)r, \forall k, p \in \mathbb{N}$$

Demonstração:

Sejam dois termos quaisquer de ordem p e k de uma PA de razão r , isto é:

$$u_p = u_1 + (p - 1)r, \forall p \in \mathbb{N} \quad (1)$$

$$u_k = u_1 + (k - 1)r, \forall k \in \mathbb{N} \quad (2)$$

Subtraindo membro a membro, tem-se:

$$u_p - u_k = u_1 + (p - 1)r - u_1 - (k - 1)r$$

$$u_p = u_k + (p - k)r, \forall k, p \in \mathbb{N}$$

A soma dos n primeiros termos de uma PA

Suponha que se pretende somar todos os termos de uma progressão aritmética, portanto partindo do princípio de que a soma de dois quaisquer termos equidistantes de uma PA é igual, obtém-se a expressão

$$S_n = \frac{u_1 + u_n}{2} \times n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração:

Seja dada PA de termos $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, \dots, u_{n-1}, u_n$

Seja S_n , a soma dos n primeiros termos desta sequência, então:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \dots + u_{n-1} + u_n \quad (1).$$

Tendo em conta a propriedade comutativa de adição, pode-se escrever esta soma, começando pelo último termo, ou seja:

$$S_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_6 + u_5 + u_4 + u_3 + u_2 + u_1 \quad (2).$$

Somando membro a membro (1) e (2), tem-se:

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + (u_3 + u_{n-2}) + (u_4 + u_{n-3}) + \dots$$

Como a soma de dois termos quaisquer equidistantes de uma PA é uma constante, então esta soma poderia estar escrita da forma:

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + (u_1 + u_n) + \dots + (u_1 + u_n)$$

$$2S_n = n(u_1 + u_n)$$

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}$$

1.10- Números poligonais

Pitágoras tinha por hábito atribuir propriedades geométricas aos números naturais e isso deu origem no surgimento de sequência de números figurativos, que são números naturais provenientes da contagem de pontos fazendo certos arranjos geométricos (Rooney, 2012). Algumas quantidades de pontos, pedras, sementes ou outros objectos podem ser arrumadas sob forma de polígonos regulares.

Números Triangulares

São números figurativos que podem ser representados por fileiras de pontos, formando triângulo equilátero da seguinte maneira: na primeira fila um ponto, na segunda fila dois pontos, na terceira fila três pontos e assim sucessivamente, logo, tem-se como a sequência de números triangulares a sequência: 1; 3; 6; 10; 15; 21; 28; ...

Trata-se de uma sequência infinita cujo termo geral é dada pela relação:

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N},$$

Números quadrangulares

Os números quadrangulares são também chamados de quadrados perfeitos e podem ser representados pelos padrões a seguir:



A sequência de números quadrangulares é dada por 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; ...

Cujo termo geral é dada por: $u_n = n^2$

Números pentagonais

São números figurativos que representam pentágonos. Assim os primeiros números pentagonais são 1; 5; 12; 22; 35; ...



O termo geral desta sucessão é dado pela expressão $u_n = \frac{n(3n-1)}{2}$

Números Hexagonais

A sequência de números hexagonais é dada por: 1; 6; 15; 28; 45; ...

Cujo termo geral é dado pela relação:

$$u_n = n(2n - 1)$$



Em suma, os números poligonais são obtidos através da soma de n primeiros termos de uma Progressão Aritmética. Daí que podemos generalizar os

números poligonais, com uma fórmula que pode ser aplicada em polígonos de qualquer número k de lados. As sequências de números poligonais são infinitas, mas podemos determinar qualquer um dos seus termos por meio de substituições.

Tabela 5: Sucessão de números poligonais

Termo geral da PA	A soma dos n primeiros termos	Número poligonal correspondente
$a_n = n$	$S_n = T_n = \frac{n(n+1)}{2}$	Triangular (3 lados)
$a_n = 2n - 1$	$S_n = T_n = n^2$	Quadrado (4 lados)
$a_n = 3n - 2$	$S_n = T_n = \frac{n(3n-1)}{2}$	Pentagonal (5 lados)
$a_n = 4n - 3$	$S_n = T_n = n(2n-1)$	Hexagonal (6 lados)
$a_n = 5n - 4$	$S_n = T_n = \frac{n(5n-3)}{2}$	Heptagonal (7 lados)
...
$a_n = (k-2)n - (k-3)$	$S_n = T_n = \frac{n}{2}[(k-2)n - (k-4)]$	k-gonal (k lados); $k \in \mathbb{Z}; k \geq 3$

Fonte: Adaptado pelo autor

1.11- Progressão Geométrica

É toda sequência de números reais diferentes de zero, onde é constante o quociente entre um termo (a partir do segundo termo) com o seu antecedente. O quociente constante recebe o nome da razão da PG e é usualmente representado pela letra q , e dada pela relação:

$$q = \frac{u_{n+1}}{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

O termo médio da Progressão Geométrica limitada de quantidade ímpar de termos, é obtido pela média geométrica dos extremos.

De acordo com a definição de Progressão Geométrica, é possível obter o seu termo geral, conhecendo apenas o primeiro termo e a razão. Que pode ser deduzida da forma seguinte: seja dada u_1 e q o primeiro termo e a razão da PG, respectivamente, então pela definição, tem-se:

$$u_1 = u_1 q^{(1-1)}$$

$$u_2 = u_1 q^{(2-1)}$$

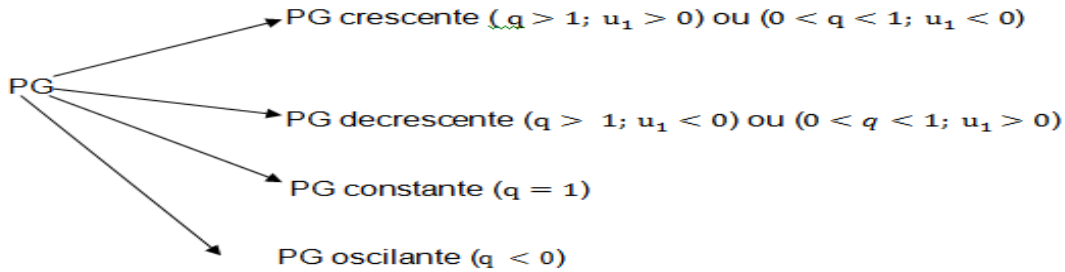
$$u_3 = u_1 q^{(3-1)}$$

$$u_4 = u_1 q^{(4-1)}$$

...

$$u_n = u_1 q^{(n-1)}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Classificação da PG, quanto a monotonia



A Soma dos n primeiros termos da PG

A expressão que possibilite a obtenção da soma dos n primeiros termos da PG, varia dependendo da razão, isto é,

$$\text{Para } q = 1 \longrightarrow S_n = nu_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\text{Para } q \neq 1 \longrightarrow S_n = \frac{1-q^n}{1-q} \times u_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Demonstração:

Seja dada a PG: $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, \dots, u_n$ de razão q .

Seja S_n , a soma dos n primeiros termos desta PG, logo:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + \dots + u_n$$

Multiplicando S_n por q , obtem-se:

$$qS_n = q(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7 + \dots + u_n). \quad (1)$$

Pela definição da PG, tem-se: $u_2 = u_1q$; $u_3 = u_1q^2$; $u_4 = u_1q^3$; $u_5 = u_1q^4$; $u_6 = u_1q^5$; ... $u_n = u_1q^{n-1}$. Substituindo em (1), tem-se:

$$qS_n = q(u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 + \dots + u_1q^{n-1})$$

$$qS_n = u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 + \dots + u_1q^n, \quad (2) \quad \text{para } q = 1 \text{ vem:}$$

$$S_n = nu_1.$$

Para $q \neq 1$, vem:

$$qS_n - S_n = u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 + \dots + u_1q^n - (u_1 + u_1q + u_1q^2 + u_1q^3 + u_1q^4 + u_1q^5 + \dots + u_1q^{n-1}), \text{ logo:}$$

$$S_n(q - 1) = u_1q^n - u_1$$

$$S_n(q - 1) = u_1(q^n - 1)$$

$$S_n = \frac{u_1(q^n - 1)}{(q - 1)} \text{ ou } S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \times u_1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Produto dos n primeiros termos da PG

O produto dos termos da PG é igual à raiz quadrada do produto dos extremos elevados pelo número de termos da sucessão. Matematicamente tem-se

$$P = u_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Demonstração

Seja dada PG de termos:

$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, \dots, u_n$, de razão q . Seja P o produto de n termos consecutivos, onde:

$P = u_1 \cdot u_1 q \cdot u_1 q^2 \cdot u_1 q^3 \dots u_1 q^{n-1}$, a igualdade que pode também escrever-se sob forma:

$$P = (u_1)^n q^{0+1+2+3+4+5+\dots+n-1} \quad (1).$$

A nova expressão, apresenta o q com o expoente a soma de n primeiros termos consecutivos de uma PA cujo primeiro termo é 0 e a razão 1, logo esta soma será dada por:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n - 1 = S_n = \frac{0+n-1}{2} n \text{ ou } S_n = \frac{n-1}{2} n \text{ que substituindo}$$

em (1), vem: $P = (u_1)^n q^{\frac{n-1}{2}n}$

Também pode-se partir da definição dada que é:

$P = \sqrt{(u_1 u_n)^n}$, como $u_n = u_1 q^{n-1}$ tem-se: $P = \sqrt{(u_1 u_1 q^{n-1})^n}$ que é:

$$P = u_1^{\frac{n}{2}} \cdot u_1^{\frac{n}{2}} \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}} \text{ logo } P = u_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

1.12- Níveis do RA atingidas na determinação de termos gerais de sucessões

A sucessão pode auxiliar de tal maneira no desenvolvimento da capacidade do raciocínio algébrico, pois para determinar o termo geral é preciso mobilizar um leque de conhecimentos, capazes de descobrir existência do que é comum para todos os termos da sucessão e de seguida, criar condições algébricas para a obtenção da expressão algébrica. No entanto, se for tratado com delicadeza pode ser de uma importância ímpar no desenvolvimento do RA, por isso, ao tratar de sucessões deve o professor explorar ao máximo a imaginação e a criatividade dos alunos. Uma aula de sucessão bem trabalhada é capaz de levar o aluno a atingir um nível de raciocínio muito elevado. Por

exemplo, o estudo realizado por Suharman e Neto (2016), apresenta um exercício abaixo:

A figura abaixo, mostra o padrão de uma lafatik que é composto por tali tahan branco e tali tahan preto. A primeira flor é formada por 6 tali tahan branco e 1 tali tahan preto, a segunda por 10 tali tahan branco e 2 tali tahan preto e assim sucessivamente.



- Quantos são os tali tahan brancos e tali tahan pretos necessários para formar 4 flores?
- Quantas flores se poderiam construir com 37 tali tahan?
- Como se modificaria o enunciado da tarefa para introduzir algum procedimento de resolução que ponha em jogo conhecimentos algébricos?
- Quais seriam tais conhecimentos algébricos?

Nesta tarefa envolve-se a dedução de uma fórmula (expressão designatória de uma função). Trata-se de uma actividade de generalização, em que n é uma variável que representa a posição na sequência identificada a partir do padrão (o domínio da função é constituído por números naturais).

Com base na observação das três primeiras flores, preenche-se os seguintes dados:

Tabela 6: Procedimento usado para determinar o termo geral

Flor	tali tahan branco	tali tahan preto	Conjunto de tali tahan
1 ^a	6=6+4.0	1	7
2 ^a	10=6+4.1	2	12
3 ^a	14=6+4.2	3	17
...
n ^a	$u_n = 6 + 4(n - 1)$ $u_n = 4n + 2$	$u_n = n$	$u_n = (4n + 2) + n$ $u_n = 5n + 2$

Suharman e Neto (2016, p.145).

As autoras mostram que este tipo de exercícios que leva a utilização de fórmulas algébricas, possibilitam a análise de conhecimentos algébricos mobilizados nesta tarefa tal como: sequência, regularidade, representação algébrica de um padrão, Progressão Aritmética.

Nesta tarefa, para se encontrar soluções, é preciso o manifesto do até nível 3 do RA, onde o estudante utiliza letras, para representar os números, Justifica de modo geral, explica o funcionamento e a estrutura de cada solução, Identifica um padrão, uma progressão aritmética, opera algebricamente e chega até uma expressão canónica.

Uma outra tarefa de sucessões que pode auxiliar no aumento do nível do RA dos alunos é a que se encontra em Branco (2013) a seguir:

Observa a sequência de blocos




Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

- Continua a sequência e desenha as figuras 5 e 6.
- Quantas peças foram utilizadas para construir cada uma das figuras? Escreve a tua resposta na tabela seguinte
- Sem usar desenhos, és capaz de descobrir quantos blocos tem a figura 20 da sequência? Explica como pensaste.

Nestas tarefas pretendia-se que os alunos continuassem com as figuras depois da descoberta do padrão, determinassem o número de peças necessários na construção de cada figura e por último, sem esboçar descobrir o número de blocos que a figura 20 terá. Estas tarefas manifestam nível do RA de até nível 3. Descoberto o padrão, que pode ser de adicionar dois blocos, sendo um na primeira fila e o outro na segunda de maneira que as juntas estejam sempre no meio do bloco. Na segunda tarefa, pode – se contar o número de blocos por figuras, formando a sequência numérica seguinte: 1, 3, 5, 7, 9, ...

Durante a experiência, na análise e discussão do trabalho dos alunos, os formandos conseguem identificar as relações que estes estabelecem e que lhes permitem depois estabelecer uma generalização algébrica em linguagem natural.

Investigadora – O que é que o [aluno] conseguiu descobrir?

F19. – Descobriu que era sempre ímpar.

Investigadora – Descobriu que era sempre ímpar? certo. E o que é que ele fez?

F11. - Fez duas vezes o 20.

Investigadora – Fez duas vezes o 20, exactamente.

F11:Depois como percebeu que tinha de ser ímpar ou tinha de ser 39 ou 41.

Investigadora – Exactamente. O que é que a professora vai fazendo?

F15. – Vai questionando.

[procurando a generalização. O aluno indica ter descoberto o segredo:

“é o dobro menos 1”]

Investigadora – O que é que o [aluno] acabou de fazer?

Beatriz: Descobriu o termo geral.

F15. – Descobriu o segredo. (Branco, 2013, pp. 195-196)

Conclusão do capítulo

Neste capítulo destacou-se:

0. RA como o desenvolvimento de um raciocínio matemático dentro de um referencial algébrico, construindo o significado para símbolos;
1. O raciocínio algébrico envolve a representação generalizada e formalizada de padrões e regularidades em qualquer aspecto da Matemática;
2. Os padrões consistem em descobrir o que é característico e comum para todos os termos da sucessão;
3. Os níveis do RA desenvolvidos são identificados pela exigência ou grau de dificuldades que cada tarefa proporciona.

**CAPÍTULO II- PROPOSTA METODOLÓGICA DE ESTRATÉGIAS
PARA DETERMINAÇÃO DO TERMO GERAL DE SUCESSÕES E
RESPECTIVOS NÍVEIS DE RA**

CAPÍTULO II- PROPOSTA METODOLÓGICA DE ESTRATÉGIAS PARA DETERMINAÇÃO DO TERMO GERAL DE SUCESSÕES E RESPECTIVOS NÍVEIS DE RA

2.0- Introdução

Neste capítulo, apresenta-se uma proposta de estratégias para determinar o termo geral de sucessões contempladas numa experiência pedagógica partilhada com alunos do II ciclo de ensino secundário e que podem auxiliar no aumento do nível do raciocínio algébrico dos alunos e conseqüentemente no aumento da capacidade de raciocínio matemático. Ainda neste capítulo fez-se um enquadramento dos níveis de RA das tarefas propostas durante a experiência como alunos e nas tarefas propostas no pós-teste.

2.1- Métodos e Procedimentos de recolha de dados

Nesta dissertação, pretende-se apresentar estratégias algébricas de auxílio para determinação de termos gerais de sucessões, para o efeito, realizou-se uma acção formativa a um grupo de 58 alunos de uma Escola de Formação de Professores, seleccionado pela técnica de amostragem não probabilística. Os instrumentos usados para a recolha de dados foram pré-teste, para verificar os conhecimentos prévios relativos a determinação de termos gerais de sucessões, o pós-teste, para avaliar o conhecimento adquirido e compará-lo com o conhecimento inicial, Assume-se aqui uma abordagem mista.

2.2- Proposta para determinação do termo geral de sucessões

Tendo em conta o problema de investigação identificado pelo autor, que é a falta de orientações como factor principal nas dificuldades que surgem na obtenção do termo geral de sucessões que não são PA e/ou PG, no estudo de sucessões, o aluno facilmente determina o termo geral de Progressão Aritmética ou Geométrica, utilizando respectivas fórmulas, mas encontra dificuldades quando a sequência em causa foge do padrão de PA ou PG. Para minimizar esta dificuldade, pretende-se explorar estratégias que permitam ao aluno determinar o termo geral de outras sucessões.

A experiência pedagógica apresentada foi desenvolvida com os alunos, num período de duas semanas (de 29 de Maio à 12 de Junho de 2023). Partindo do conhecimento de sucessões particulares, nomeadamente a sucessão de

números naturais, a sucessão constante ou até mesmo a sucessão quase constante, cujos termos gerais são considerados como conhecimentos de base:

✓ Termo geral da sucessão de números naturais:

(1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; ... n); $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$;

✓ Termo geral da sucessão constante, (3; 3; 3; 3; 3; 3; ... 3), $b_n = 3, \forall n \in \mathbb{N}$

✓ Sucessão quase constante, 1; 2; 3; 4; 20; 20; 20; 20, 20, 20, ... onde é possível referir que o termo geral desta sucessão é dado por duas sub-

sucessões, $c_n = \begin{cases} n & \text{para } n < 5 \\ 20 & \text{para } n \geq 5 \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}$.

2.2.1- Estratégia 1- Decomposição de termos da sucessão

Pode-se com o uso do raciocínio matemático - algébrico encontrar termos gerais de qualquer sucessão procedendo da seguinte forma:

- 1- Descobrir o padrão da sequência em causa, no qual todos os termos da sequência obedecem;
- 2- Decompor todos os termos conhecidos da sequência em operações de sequências conhecidas pelo padrão descoberto;
- 3- Substituir as sequências pelos correspondentes termos gerais conhecidos e operá-los.

Nível 3 do RA

Nos exemplos 1,2 e 3, pretende-se encontrar soluções que manifestam o nível 3 do RA, envolvendo a dedução de uma expressão (termos gerais de sucessões). Trata-se de actividades de generalização em que n é uma variável natural que representa a posição do termo na sequência em causa a partir do padrão identificado.

Exemplo 1

A sequência 1; 3; 5; 7; 9; 11; ... Depois da descoberta do seu padrão, é decomposto pelo critério fornecido pelo padrão da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 1 &= 1 + 1 - 1 \\
 3 &= 2 + 2 - 1 \\
 5 &= 3 + 3 - 1 \\
 7 &= 4 + 4 - 1 \\
 9 &= 5 + 5 - 1 \\
 11 &= 6 + 6 - 1 \\
 &\dots \\
 u_n &= n + n - 1 \implies u_n = 2n - 1
 \end{aligned}$$

Exemplo 2

O termo geral da sucessão: 2, 5, 8, 11, 14, 17, ...

$$\begin{aligned}
 2 &= 1 + 1 \\
 5 &= 2 + 3 \\
 8 &= 3 + 5 \\
 11 &= 4 + 7 \\
 14 &= 5 + 9 \\
 17 &= 6 + 11 \\
 &\dots \\
 u_n &= n + 2n - 1 \implies u_n = 3n - 1
 \end{aligned}$$

Exemplo 3

O termo geral da sucessão: 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

$$\begin{aligned}
 1 &= \frac{1^2}{2} + \frac{1}{2} \\
 3 &= \frac{2^2}{2} + \frac{2}{2} \\
 6 &= \frac{3^2}{2} + \frac{3}{2} \\
 10 &= \frac{4^2}{2} + \frac{4}{2} \\
 15 &= \frac{5^2}{2} + \frac{5}{2} \\
 21 &= \frac{6^2}{2} + \frac{6}{2} \\
 &\dots \\
 u_n &= \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}
 \end{aligned}$$

O procedimento que se estabelece nos três exemplos anteriores, exige do aluno um raciocínio algébrico de nível 3, pois envolvem objectos intensivos ou indeterminados e a generalização definida por recorrência e identificação de

padrão, apesar do exemplo 3 possuir um grau de complexidade maior, pois não se trata de uma tarefa fácil descobrir o padrão em causa. Para tal, o aluno deve apresentar como conhecimentos prévios, operações aritméticas, utilização de letras como representantes dos números e o conhecimento de termos gerais destacados anteriormente.

A complexidade apresentada no exemplo 3, levou a apresentação de um procedimento do nível de RA mais elevado em relação ao anterior.

2.2.2- Estratégia 2- parâmetros por determinar

Níveis 4 e 5 do RA

O raciocínio abaixo, é utilizado para encontrar soluções que manifestam os níveis 4 e 5 do RA, determinando os parâmetros, depois da descoberta do grau do polinómio.

É preciso que se compreenda que uma sucessão é uma função real de variável natural, isto é, pode ser definida como uma restrição de função real de variável real. No caso de funções polinomiais, a sua restrição em \mathbb{N} , é uma sucessão onde o termo geral, pode ser representado por uma função polinomial de variável natural do tipo: $P(n) = u_n$.

Procedimentos:

- 1- Determinar as diferenças entre os termos sucessivos da sequência. (Caso a diferença seja uma constante, a sucessão é uma restrição da função polinomial do I grau);
- 2- Caso a diferença não seja constante, então formar a sequência das diferenças obtidas no ponto 1 e obter as respectivas diferenças. (Caso esta nova diferença seja uma constante, a sucessão é uma restrição da função polinomial do II grau, caso contrário, formar a sequência das diferenças e efectuar outra vez a diferença);
- 3- O processo deve continuar até encontrar diferença constante.

Progressão Aritmética

Refere-se a aquela sucessão em que a diferença entre termos consecutivos é constante. Esta diferença constante chama-se razão. Portanto, o seu termo geral é tido como uma restrição em \mathbb{N} da função polinomial do primeiro grau e dado por:

$$u_n = u_1 + (n - 1)r; \forall n \in \mathbb{N}$$

Ou seja:

$$u_n = u_1 + nr - r$$

$u_n = nr + (u_1 - r)$, fazendo $r = a$ e $u_1 - r = b$ obtém uma expressão do tipo polinomial: $P(n) = u_n = an + b; \forall n \in \mathbb{N} \wedge a, b \in \mathbb{R}$

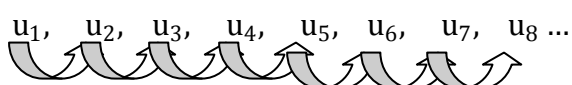
Desta nova relação, os três primeiros termos da sucessão são dados por:

$$u_1 = a + b; u_2 = 2a + b; u_3 = 3a + b$$

Logo, os parâmetros a e b , podem ser determinados pela solução do sistema:

$$\begin{cases} a + b = u_1 \\ 2a + b = u_2 \end{cases}$$

Esquemáticamente:



$$D_1 \quad D_2 \quad D_3 \quad D_4 \quad D_5 \quad D_6 \quad D_7 \dots \text{ onde } D_n = u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = \dots$ Progressão Aritmética do 1º grau.

Exemplo 4:

O termo geral da sequência: 1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; ... pode ser obtido pela diferença entre os termos:



Desta forma, trata-se de uma Progressão Aritmética, onde o termo geral será dado por: $u_n = an + b$, onde

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a = 3 \end{cases} \text{ consequentemente } b = -2, \text{ logo o termo geral será: } u_n = 3n - 2.$$

Sucessões em que as diferenças consecutivas dos termos consecutivos constituem uma PA

Refere-se a sucessão em que a razão constante é obtida pela diferença das diferenças consecutivas dos termos consecutivos da sequência. Nestes casos,

o termo geral será uma expressão polinomial do segundo grau, de forma

$$u_n = an^2 + bn + c, \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

Os termos particulares da sucessão de termo geral $u_n = an^2 + bn + c$, são dados por:

$$u_1 = a + b + c$$

$$u_2 = 4a + 2b + c$$

$$u_3 = 9a + 3b + c$$

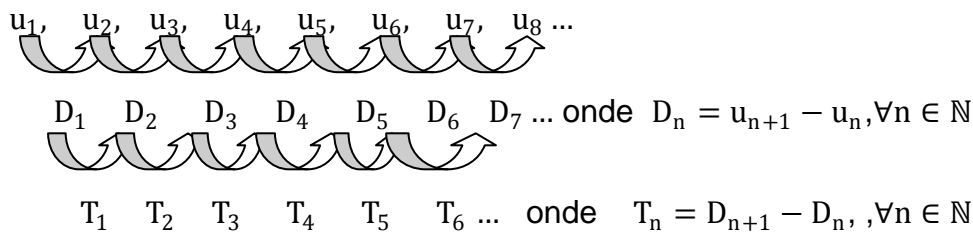
$$u_4 = 16a + 4b + c$$

$$u_5 = 25a + 5b + c$$

...

$$u_n = an^2 + bn + c, \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

Este raciocínio é utilizado para determinar soluções que manifestam o nível 5 do RA, com a determinação dos parâmetros a , b e c , auxiliando deste modo a encontrar alguns termos gerais de sucessões que não são PA nem PG. O esquema é o seguinte:



Se $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = \dots$ termo geral do tipo:

$u_n = an^2 + bn + c, \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$. Os parâmetros a, b, c são determinados pelo sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = u_1 \\ 4a + 2b + c = u_2 \\ 9a + 3b + c = u_3 \end{cases}$$

As diferenças entre dois termos consecutivos desta sucessão são dadas por:

$$u_2 - u_1 = 4a + 2b + c - a - b - c = 3a + b$$

$$u_3 - u_2 = 9a + 3b + c - 4a - 2b - c = 5a + b$$

$$u_4 - u_3 = 16a + 4b + c - 9a - 3b - c = 7a + b$$

$$u_5 - u_4 = 25a + 5b + c - 16a - 4b - c = 9a + b$$

...

$$u_{n+1} - u_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - an^2 - bn - c$$

$$u_{n+1} - u_n = an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c$$

$$u_{n+1} - u_n = a(2n+1) + b$$

As diferenças das diferenças consecutivas dos termos consecutivos da sucessão são obtidas por:

$$u_3 - u_2 - (u_2 - u_1) = u_4 - u_3 - (u_3 - u_2) = u_5 - u_4 - (u_4 - u_3) = \dots = u_{n+1} -$$

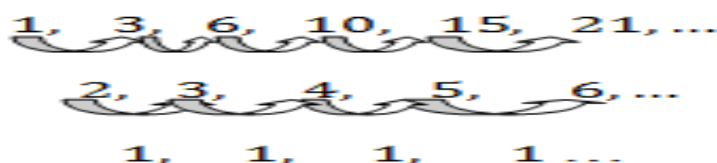
$$u_n - (u_n - u_{n-1}) = 2a$$

Como a razão constante foi encontrada pela diferença das diferenças consecutivas dos termos consecutivos da sucessão, então a expressão do termo geral da sucessão será uma restrição da função polinomial do segundo grau, do tipo: $u_n = an^2 + bn + c$. Os parâmetros a , b , c são soluções do sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = u_1 \\ 3a + b = u_2 - u_1 \\ 2a = T_n \end{cases}$$

Exemplo 5

Determinar o termo geral da sucessão: 1; 3; 6; 10; 15; 21; ...



Como a razão constante é do segundo grau, pois resulta da diferença das diferenças consecutivas dos termos consecutivos da sucessão, então o termo geral será dado pela expressão polinomial do segundo grau do tipo:

$$u_n = an^2 + bn + c, \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \text{ Onde:}$$

$$u_1 = a + b + c = 1$$

$$u_2 - u_1 = 3a + b = 2$$

$u_3 - u_2 - (u_2 - u_1) = 2a = 1$ logo os parâmetros a, b, c são determinados pelo sistema

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 3a + b = 2 \\ 2a = 1 \end{cases} \text{ resolvendo tem-se:}$$

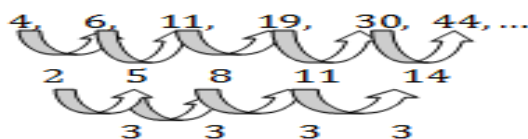
$2a = 1, a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \wedge c = 0$ logo o termo geral da sucessão será dado por:

$$u_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemplo 6

Determinar o termo geral da sucessão 4, 6, 11, 19, 30, 44, ...

Resolução:



Temos o sistema de equações $\begin{cases} 2a = 3 \\ 3a + b = 2 \\ a + b + c = 4 \end{cases}$

$$2a = 3 \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{3}{2}$$

$$3a + b = 2$$

$$3 \times \frac{3}{2} + b = 2 \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{5}{2}$$

$$a + b + c = 4 \quad \Longrightarrow \quad c = 5$$

Logo o termo geral da sucessão será: $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 5$

Sucessões em que as diferenças consecutivas das diferenças consecutivas dos termos consecutivos constituem uma PA

Quando a razão é obtida pela terceira diferença, o termo geral da sucessão é a restrição da função polinomial do terceiro grau, dada por

$$u_n = an^3 + bn^2 + cn + d; \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

Os termos da sucessão são dados por:

$$u_1 = a + b + c + d$$

$$u_2 = 8a + 4b + 2c + d$$

$$u_3 = 27a + 9b + 3c + d$$

$$u_4 = 64a + 16b + 4c + d$$

$$u_5 = 125a + 25b + 5c + d$$

$$u_6 = 216a + 36b + 6c + d$$

...

$$u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7, u_8 \dots$$



$$D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7 \dots \text{ onde } D_n = u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$



$$T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 \dots \text{ onde } T_n = D_{n+1} - D_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

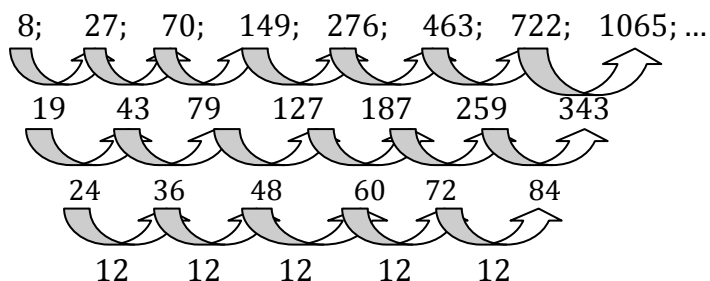
$$F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 \dots \text{ onde } F_n = F_{n+1} - F_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Se $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = F_5 = \dots$ Progressão Aritmética do 3º grau do tipo:

$u_n = an^3 + bn^2 + cn + d; \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$. Os parâmetros reais a, b, c, d são determinados pela solução do sistema

$$\begin{cases} a + b + c + d = u_1 \\ 8a + 4b + 2c + d = u_2 \\ 27a + 9b + 3c + d = u_3 \\ 64a + 16b + 4c + d = u_4 \end{cases}$$

Exemplo 7: determinar o termo geral da sucessão



Logo é uma sucessão cujo termo geral é dado pela expressão:

$$u_n = an^3 + bn^2 + cn + d, \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \text{ onde}$$

$$\begin{cases} a + b + c + d = 8 \\ 7a + 3b + c = 19 \\ 12a + 2b = 24 \\ 6a = 12 \end{cases}$$

$a = 2; b = 0; c = 5; d = 1$ logo o termo geral é dado pela relação:

$$a_n = 2n^3 + 5n + 1.$$

Termo geral de Progressão Aritmética de p-ésimo grau

$$u_n = an^p + bn^{p-1} + \dots + en^2 + fn + g, \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c, d, \dots, e, f, g \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

Deste modo, os parâmetros são obtidos pelo sistema de $p + 1$ equações abaixo:

$$\begin{cases} a + b + c + \dots + e + f + g = u_1 \\ 2^p a + 2^{p-1} b + 2^{p-2} c + \dots + 2^2 e + 2^1 f + g = u_2 \\ 3^p a + 3^{p-1} b + 3^{p-2} c + \dots + 3^2 e + 3^1 f + g = u_3 \\ \dots \\ (p+1)^p a + (p+1)^{p-1} b + (p+1)^{p-2} c + \dots + (p+1)^2 e + (p+1)^1 f + g = u_{p+1} \end{cases}$$

2.2.3- Estratégia 3- Representação gráfica

A estratégia é utilizada com a intenção de encontrar soluções que manifestam nível 5 do RA com a determinação de parâmetros presentes na expressão induzida pela representação gráfica de alguns termos da sequência.

Software GeoGebra e seu uso na determinação do termo geral de sucessões

O GeoGebra é um software de matemática dinâmica livre, que permite a construção de diversos objectos geométricos, como pontos, vectores, segmentos, rectas, secções cónicas, gráficos representativos de funções e curvas parametrizadas os quais podem ser modificados dinamicamente. Os valores e coordenadas podem ser introduzidos directamente com o teclado, além da vantagem de se poder trabalhar utilizando variáveis vinculadas a números, vectores e pontos. (Programa de Educação Tutorial Matemática da Universidade Federal de Santa Maria, [PET], 2016).

Segundo este grupo, o GeoGebra foi criado por Markus Hohenwarter em 2001. Foi desenvolvido para o ensino aprendizagem da álgebra e geometria de forma livre e gratuito. Este software ainda oferece a visualização do que está a ser trabalhado, pois fornece três diferentes pontos de vistas: A zona gráfica, a zona algébrica e a folha de cálculo, favorecendo a percepção por parte do aluno e professor, auxiliando-os a descobrir formas menos usuais de encontrar a solução do problema.

Formas de representar graficamente uma sequência numérica com auxílio de GeoGebra.

Tendo em conta as relações binárias entre dois conjuntos, referidos no capítulo anterior, onde cada número natural se faz corresponder a um e só número real, é possível representar graficamente uma sucessão, de termos $u_1; u_2; u_3; u_4; u_5; \dots; u_n$, mesmo desconhecendo o respectivo termo geral.

Fazendo uma adaptação, para representar pontos no GeoGebra pode-se proceder da seguinte forma:

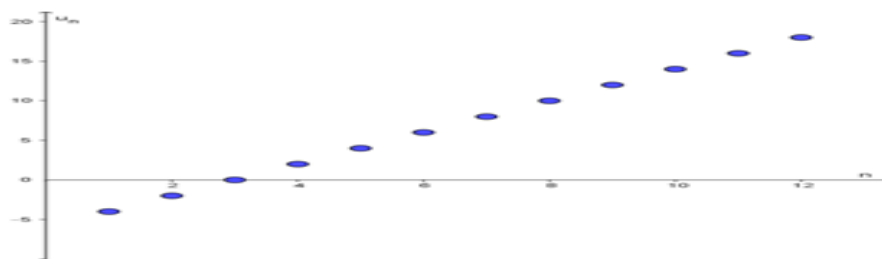
- 1- Formar pares ordenados com os primeiros termos conhecidos da sequência da seguinte forma: $(1; u_1), (2; u_2), (3; u_3), (4; u_4), \dots (n; u_n)$;
- 2- Representar pares ordenados formados no primeiro ponto, no GeoGebra;
- 3- Analisar a trajectória dos pontos representados e extrair a função polinomial.

Exemplo 8

Determinar o termo geral da sucessão: $-4; -2; 0; 2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; \dots$

Para representar graficamente a sucessão de termos, basta que se represente no GeoGebra os pontos de coordenadas:

$(1; -4), (2; -2), (3; 0); (4; 2), (5; 4), (6; 6); (7; 8); (8; 10); (9; 12); (10; 14); (11; 16); (12; 18) \dots$



Como se pode verificar, pontos do gráfico têm uma recta suporte por tanto, leva a induzir que se trata de uma progressão aritmética do 1º grau cuja expressão do termo geral é de forma: $u_n = an + b, \forall n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ Onde:

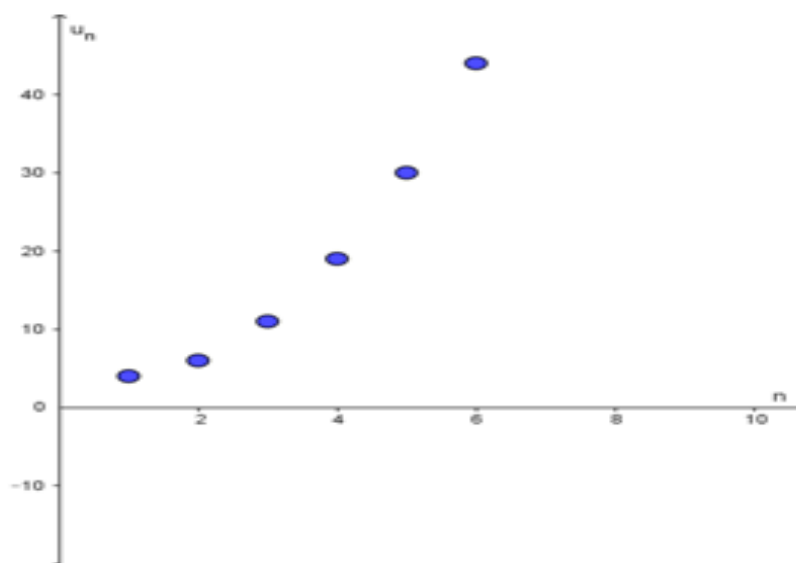
$$u_1 = a + b = -4, u_2 = 2a + b = -2$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} a + b = -4 \\ 2a + b = -2 \end{cases}$ vem $a = 2 \wedge b = -6$ que nos leva a concluir que o termo geral da sucessão é $u_n = 2n - 6$

Exemplo 9

Determine o termo geral da sucessão: $4; 6; 11; 19; 30; 44; \dots$

Começando por representar graficamente os pontos de coordenadas $(1; 4), (2; 6), (3; 11), (4; 19), (5; 30), (6; 44)$ no GeoGebra, tem-se



A sucessão representada no gráfico acima, os pontos apresentam uma restrição de trajectória parabólica, daí que pode-se induzir que o seu termo geral é do tipo:

$$u_n = an^2 + bn + c, \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0, \text{ onde:}$$

$$u_1 = a + b + c = 4$$

$$u_2 = 4a + 2b + c = 6$$

$$u_3 = 9a + 3b + c = 11$$

Resolvendo o sistema de equações tem-se: $a = \frac{3}{2}; b = -\frac{5}{2} \wedge c = 5$. O termo

geral da sucessão seria nestes moldes dado por: $u_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 5$

Exemplo 10:

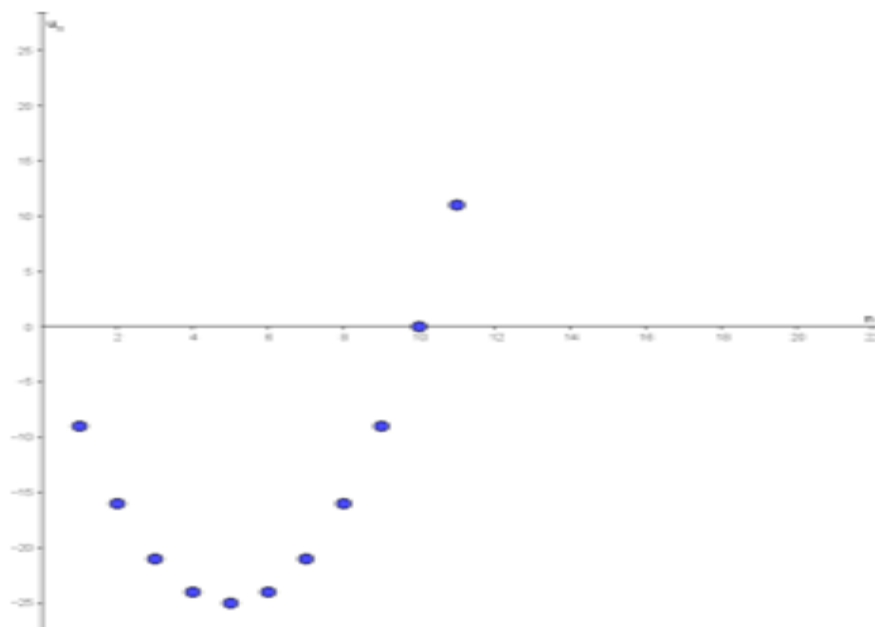
Encontrar o termo geral da sucessão de termos:

-9; -16; -21; -24; -25; -24; -21; -16; -9; 0; 11; ...

Representando graficamente a sucessão, utilizando as coordenadas dos pontos:

(1; -9), (2; -16), (3; -21), (4; -24), (5; -25), (6; -24), (7; -21), (8; -16)

(9; -9), (10; 0), (11; 11) obtém - se o gráfico abaixo:



A sucessão tem uma trajectória parabólica, no entanto o seu termo geral terá a forma: $u_n = an^2 + bn + c; \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$ onde:

$$u_1 = a + b + c = -9, u_2 = 4a + 2b + c = -16, u_3 = 9a + 3b + c = -21$$

Resolvendo o sistema de equações obtém-se $a = 1; b = -10 \wedge c = 0$

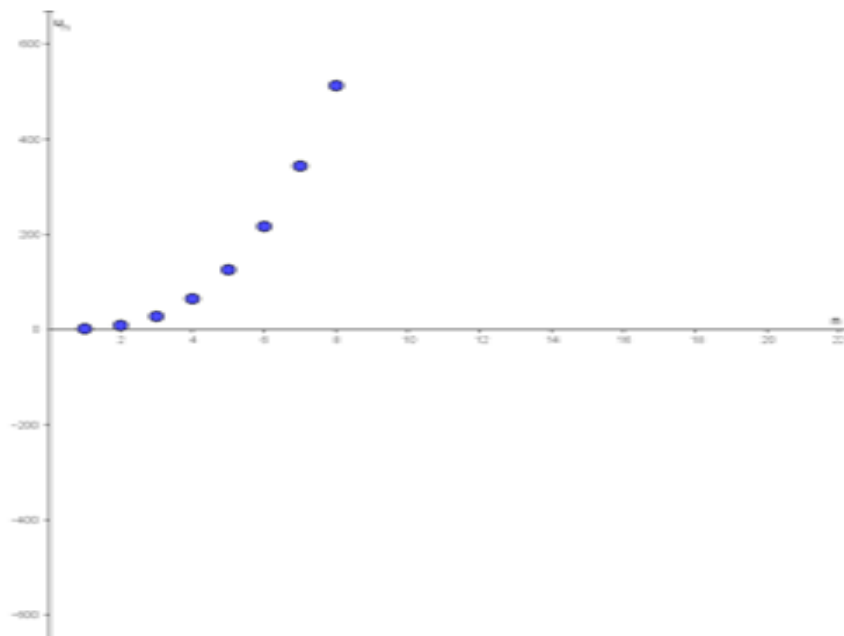
O termo geral pretendido é $u_n = n^2 - 10n$

Exemplo 11

Determinar o termo geral da sucessão: 2; 9; 28; 65; 126; 217; 344; 513 ...

Começando por fazer a representação gráfica dos pontos:

(1; 2)(2; 9)(3; 28)(4; 65)(5; 126) (6; 217)(7; 344) (8; 513) obtém-se o gráfico



A trajectória deste gráfico pode confundir-se com a parábola, é preciso muita atenção, pois é uma restrição de uma função cúbica, cuja expressão do termo geral é de forma seguinte:

$$u_n = an^3 + bn^2 + cn + d, \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c, d \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0 \text{ onde:}$$

$$u_1 = a + b + c + d = 2, u_2 = 8a + 4b + 2c + d = 9, u_3 = 27a + 9b + 3c + d = 28$$

$$u_4 = 64a + 16b + 4c + d = 65$$

Resolvendo o sistema obtém-se:

$$a = 1; b = 0; c = 0; d = 1$$

Substituindo, obtém-se o termo geral pretendido que é $u_n = n^3 + 1$

Este procedimento também exige RA de nível 5, pois é preciso que o aluno conheça a família de função polinomiais para de seguida decidir o tipo de função que se trata. A determinação e a operacionalização de parâmetros é a outra característica relevante neste nível.

2.3- Identificação dos níveis de RA nas tarefas do pós-teste

As tarefas propostas tiveram como objectivo principal, verificar o nível de raciocínio que os alunos atingiram depois da experiência pedagógica da qual participaram.

Tarefa 1: Observa a seguinte sequência em que estão representadas as quatro primeiras figuras formadas com fósforos (Foi inspirada e adaptada do manual do aluno)



Mantendo a regularidade na construção das figuras pede-se:

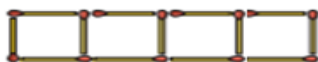
- A representação da quinta figura.
- Quantos fósforos tem a sexta figura?
- Quantos fósforos tem a n -ésima figura?

Nesta tarefa, é preciso que o aluno analise as figuras de forma particular para depois generalizar as particularidades observadas em cada figura, obtendo assim um padrão. A tabela 5 abaixo mostra o nível do R.A. considerado essencial para a resolução da tarefa.

Tarefa1

a) Solução esperada

Pretende-se verificar o padrão no surgimento das figuras e como consequência desta análise esboçar 5ª Figura



Nível do RA (Zero)

- Não envolve qualquer símbolo algébrico nem soluções algébricas;
- Utiliza-se a representação de uma figura constituída de palitos.

b) Solução esperada

Nesta tarefa temos duas possibilidades. Uma consiste em esboçar a sexta figura e fazer a contagem de fósforos que a constituem e a outra é formar a sequência relacionada com o número de fósforos em cada figura, encontrando deste modo o padrão.

1ª Possibilidade: Representação da sexta figura



Portanto, a sexta figura tem 16 fósforos

Nível do RA (Zero)

- Não envolve qualquer símbolo algébrico nem soluções algébricas;
- Utiliza-se uma representação da figura constituída de palitos;
- Efectua-se a contagem de palitos presentes na figura.

2ª Possibilidade: Número de palitos por figuras:

Figura	Nº de palitos
1. ^a	1
2. ^a	4
3. ^a	7
4. ^a	10
5. ^a	13
6. ^a	16

Portanto, a sexta figura tem 16 fósforos

Nível do RA (Um)

- Utiliza a linguagem numérica;
- Envolve as propriedades de adição e de subtracção de números.

c) Solução esperada

A sequência: 1; 4; 7; 10; 13; 16; ... pode decompor-se em:

$$1 = 1 + 1 - 1$$

$$4 = 2 + 3 - 1$$

$$7 = 3 + 5 - 1$$

$$10 = 4 + 7 - 1$$

$$13 = 5 + 9 - 1$$

$$16 = 6 + 11 - 1$$

...

$$a_n = n + 2n - 1 - 1$$

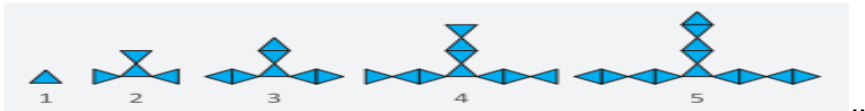
$$a_n = 3n - 2$$

Nível do RA (Três)

- Exige o conhecimento de operações aritméticas;
- Utiliza-se letras como representante dos números;

- Envolve-se objectos indeterminados ou variáveis
- Envolve-se as operações algébricas;
- A generalização definida por identificação de padrão;
- As expressões obtidas, n , $2n - 1$ e -1 sofrem transformações para a obtenção a nova expressão $3n - 2$.

Tarefa 2: As figuras seguintes representam os cinco primeiros termos de uma sequência.



- Defina um padrão no surgimento de mais figuras
- Esboce a sexta figura
- Determine a sucessão por recorrência quanto ao número de triângulos.

Esta tarefa é praticamente do mesmo nível de RA da tarefa anterior, com um diferencial, o aluno deve analisar e escrever o padrão, sem no entanto recorrer a números ou em desenhos de figuras.

Tarefa2

a) Solução esperada

O estudante deve ser capaz de analisar o padrão no surgimento de mais figuras.

O padrão pode ser o seguinte: começar com o triângulo, a partir daí, crescer três triângulos na figura anterior, um em cada vértice da seguinte forma:

- Ordem par: unir os vértices do triângulo a crescer com os dos triângulos da figura anterior;
- Ordem ímpar: unir as bases dos triângulos da figura anterior, com as bases dos triângulos crescer.

Nível do RA (Zero)

- Não envolve qualquer símbolo algébrico nem soluções algébricas;
- Utiliza-se apenas o raciocínio na descoberta do padrão.

b) Solução esperada

Descoberto o padrão, é simples obter a próxima figura ou figura de qualquer ordem



Nível do RA (Zero)

- Não envolve qualquer símbolo algébrico nem soluções algébricas;
- Utiliza-se a representação de uma figura constituída de triângulos

c) Solução esperada

Tem-se o número de triângulos que constituem cada figura:

Ordem da figura	Número de triângulos
1ª	1
2ª	4
3ª	7
4ª	10
5ª	13
6ª	16

Logo a sucessão por recorrência é

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 3 + u_n; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nível do RA (Três)

- Exige o conhecimento de operações aritméticas;
- Utiliza-se letras como representante dos números;
- Envolve-se objetos indeterminados ou variáveis;
- A generalização definida por recorrência por identificação de padrão.

Tarefa 3: Determine o termo geral de sucessões, sem recorrer a fórmulas de PA ou PG.

- $-\frac{1}{2}; -3; -\frac{15}{2}; -14; -\frac{45}{2}; \dots$
- $-9; -6; -1; 6; 15; 26; \dots$
- $-1; 2; 7; 14; 23; 34; 5; 9; 13; 17; \dots$
- $1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; \dots$

Tarefa 3

a) Solução esperada

$$\begin{array}{ccccccc} -\frac{1}{2} & ; & -3 & ; & -\frac{15}{2} & ; & -14 & ; & -\frac{45}{2} & ; & \dots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ -\frac{5}{2} & - & \frac{9}{2} & - & \frac{13}{2} & - & \frac{17}{2} & & & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ -2 & - & -2 & - & -2 & & & & & & \end{array}$$

Verifica-se que a partir do sétimo termo, a sequência toma um padrão diferente, criando assim um termo geral da sucessão constituída por duas sub-sucessões ou dois padrões condicionais (para $n \leq 6$ e para $n > 6$).

Para a primeira, tem-se uma sub-sucessão que é expressão do segundo grau e a outra do primeiro grau.

$$u_n = an^2 + bn + c; \forall n \in \mathbb{N}; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \wedge n \leq 6$$

$$\text{Onde: } \begin{cases} 2a = 2 \\ 3a + b = 3 \\ a + b + c = -1 \end{cases} \implies a = 1, b = 0, c = -2$$

A segunda sub - sucessão é uma expressão do primeiro grau, tal que o sétimo termo é 5 e razão 4

$$u_n = an + b$$

Onde os parâmetros reais a, b são obtidos da solução do sistema

$$\begin{cases} 7a + b = 5 \\ a = 4 \end{cases} \text{ cuja resolução apresenta como valor de } b = -23$$

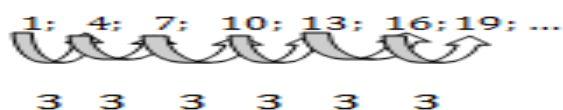
O termo geral da sucessão será

$$u_n = \begin{cases} n^2 - 2, \text{ para } n \leq 6 \\ 4n - 23, \text{ para } n > 6 \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$$

Nível do RA (cinco)

- Envolve-se a linguagem simbólica - literal;
- Envolve-se os objectos algébricos (variáveis e parâmetros);
- Realiza-se operações algébricas para determinar os parâmetros;
- Efectua-se operações algébricas com parâmetros.

d) Solução esperada



Progressão aritmética, onde o termo geral é dada pela expressão: $u_n = an + b$,

$$\forall n \in \mathbb{N}; a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \text{ em que: } a = 3 \quad a + b = 1 \implies b = -2$$

$$u_n = 3n - 2$$

Nível do RA (cinco)

- Envolve-se a linguagem simbólica literal;
- Envolve-se os objectos algébricos (variáveis e parâmetros);
- Realiza-se operações algébricas para determinar os parâmetros;
- Efectua-se operações algébricas com parâmetros.

Conclusão do Capítulo

As estratégias apresentadas neste capítulo, podem:

- 1- Ser utilizadas para determinar o n - ésimo termo de qualquer sucessão cuja expressão geral se apresente sob forma de uma expressão polinomial;
- 2- Os resultados do pós-teste, mostram após a acção formativa, os alunos apresentam um nível do RA mais desenvolvido na resolução de tarefas que envolvem termos gerais de sucessões que não são PA nem PG;
- 3- Se as estratégias forem bem trabalhadas promove o nível de RA dos alunos e auxilia o mesmo a ultrapassar parte das dificuldades que apresentam no tratamento de termos gerais de sucessões que não são PA e/ou PG;
- 4- Na determinação do termo geral de sucessões, GeoGebra surge como suporte na representação gráfica de pontos isolados de sucessões para a observação da trajectória formada pela sequência dos pontos.

CAPÍTULO III- ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

CAPÍTULO III- ANÁLISE E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

3.0- Introdução

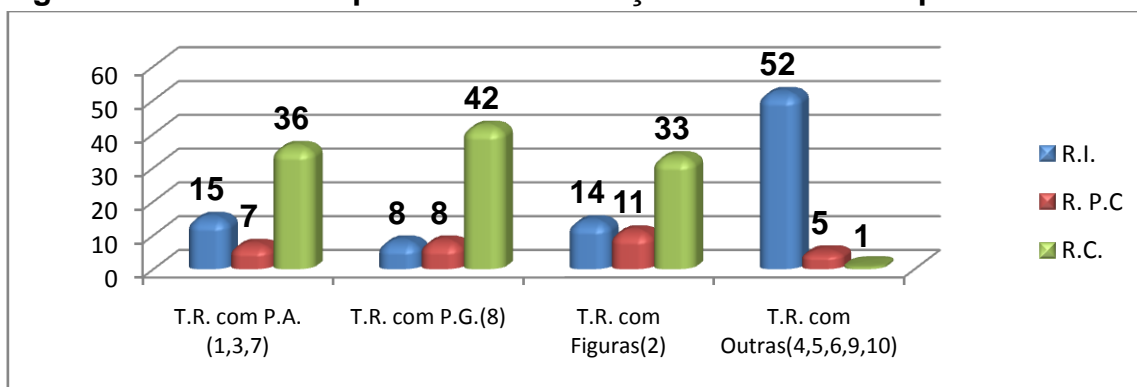
Este capítulo, assentou-se na apresentação, análise e discussão de informações recolhidas no pré-teste, aplicado a 58 alunos da 11.^a classe de uma Escola de Formação de Professores, participantes no estudo e na comparação dos resultados obtidos no pré-teste em relação aos resultados obtidos no pós-teste após o estudo com o mesmo grupo, na entrevista realizada a 5 professores que leccionam a Matemática na Escola de Formação de Professores e na avaliação da proposta feita por especialistas.

3.1- Análise de Resultados do Pré-Teste

Os dados representados no gráfico da figura 10 abaixo, referem-se aos resultados médios obtidos em 10 tarefas do pré-teste aplicados com o objectivo de verificar o nível de conhecimento, compreensão e criatividade existente na determinação de termos gerais de sucessões. As tarefas propostas foram divididas em quatro sectores:

- 1- Tarefas relacionadas com o termo geral da PA (T.R.com PA);
- 2- Tarefas relacionadas com o termo geral da PG (T.R.com PG);
- 3- Tarefas relacionadas com a sequência de figuras (T.R.com Figuras);
- 4- Tarefas relacionadas com outras sucessões (T.R.com outras).

Figura 10: Gráfico comparativo de resolução das tarefas do pré-teste



Fonte: Adaptado pelo Próprio autor

Depois de analisada e corrigida, cada grupo de tarefa foi classificada em resolução correcta (R.C), resolução parcialmente correcta (R.P.C) e resolução

incorrecta (R. I), dependendo de como foi respondida cada tarefa. As questões foram elaboradas com o objectivo de verificar a capacidade dos alunos na dedução do termo geral de algumas sucessões, mas e identificar o nível de raciocínio algébrico que esses alunos atingiram nos temas “Análise de padrões em sequências e na determinação de termos gerais de qualquer sucessão”. Para o efeito, elaborou-se quatro questões, cujos resultados se encontram resumidos nas tabelas de 7 a 16. As questões das tabelas 7, 9, 13 e 14, tinham por objectivos, verificar os níveis de conhecimentos dos alunos na identificação de padrões em sequências numéricas e de verificar esses níveis na determinação de termos gerais de progressão aritmética e/ou geométrica. A questão da tabela 8, tinha por objectivo verificar o nível de conhecimento de alunos na identificação de padrões em figuras. Os resultados mostram que a maioria da turma consegue determinar o termo geral tanto de Progressão Aritmética como da Geométrica, com o uso de respectivas fórmulas. Mas quando se trata da análise e descoberta de padrões de figuras, sem se tratar de Progressões Aritméticas e/ou Geométricas, e apesar de uma maioria ter acertado a questão, notou-se uma diminuição significativa em termos percentuais, como indicam as tabelas 8 e 9 em comparação as tabelas 7,13 e 14. Os resultados observados nas tabelas 10,11,12,15 e 16, mostram as dificuldades que os alunos apresentam quando a sucessão não é PA e/ou PG.

Primeira Questão - Nível do RA (três)

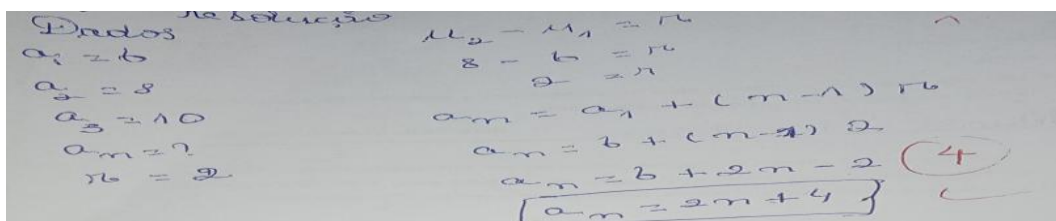
Considera uma sequência de figuras compostas por quadrados, sendo a 1.^a figura composta por 6 quadrados, a 2.^a figura por 8 quadrados, a 3.^a figura por 10 quadrados e assim sucessivamente. Determina o termo geral da sequência. Nesta questão, esperava-se que os alunos traduzissem o problema em uma sequência numérica de termos 6; 8; 10; 12; ... e de seguida encontrar o termo geral da Progressão Aritmética. Esta Questão é enquadrada no nível 3 do RA, pois o estudante poderia utilizar letras, para representar números (Quantidade de figuras), Identificar um padrão, uma Progressão Aritmética, operar algebricamente até chegar a expressão canónica em representação ao termo geral. O aproveitamento desta foi resumido na tabela 7 abaixo:

Tabela 7: Resumo do aproveitamento na primeira Questão do Pré-teste

Género/Idade do Estudante			Resolução da Primeira Questão			Total
			Raciocínio incorrecto	Raciocínio inicial Certo, mas não concluído	Raciocínio inicial Certo e resolução certa	
F	Idade do Aluno (Em Anos)	16	0		7	7
		17	1		7	8
		18	0		2	2
		19				
		20				
Total			1		16	17
M	Idade do Aluno (Em Anos)	16	0	0	14	14
		17	0	2	9	11
		18	1	2	9	12
		19	1	0	2	3
		20	0	0	1	1
Total			2	4	35	41
Total	Idade do Aluno (Em Anos)	16	0	0	21	21
		17	1	2	16	19
		18	1	2	11	14
		19	1	0	2	3
		20	0	0	1	1
Total			3	4	51	58

Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

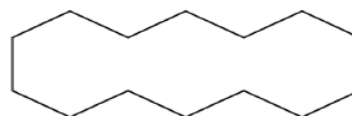
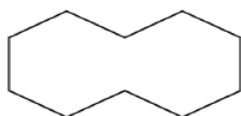
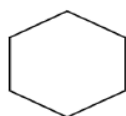
A tabela 7, mostra que apenas 5,2% raciocinou de forma incorrecta, 6,9% teve um raciocínio correcto, mas cometeu erro depois de substituir na fórmula do termo geral. Os restantes 87,9% dos alunos participantes obtiveram o termo geral com sucesso, determinando-o com a identificação do tipo de sucessão e a aplicação da respectiva fórmula como mostra a produção abaixo:



Fonte: Produção do aluno

Segunda questão – Nível do RA (zero e três)

As figuras seguintes representam os três primeiros termos de uma sequência.



a) Representa os dois termos seguintes da sequência.

b) Identifica o termo geral desta sequência quanto ao número de arestas.

Esta questão, alínea a é enquadrada no nível zero do RA, Pois, para resolver, basta o aluno observar e identificar o padrão nas três primeiras figuras não envolvendo qualquer símbolo algébrico. Quanto a alínea b, o número de segmentos que constituem cada figura. Cada hexágono precisa de 6 segmentos, então a figura na posição n precisaria de $6n$ segmentos, mas a colocação de dois hexágonos juntos pelo padrão observado, implica eliminar dois segmentos, portanto na 2.^a figura, elimina-se 2 segmentos, na 3.^a, 4 são eliminados, na 4.^a, 6 são eliminados, ou seja, na posição n serão eliminados $(2n - 2)$ segmentos. Pretende-se com isto dizer que, na primeira figura tem 6 segmentos, na segunda 10 segmentos, na terceira figura 14 segmentos, na quarta figura 18 segmentos sendo assim, na n -ésima figura terá

$$6n - (2n - 2) = 4n + 2 \text{ Segmentos.}$$

Esta solução envolve uma generalização do tipo misto, contexto e simbólico, considerando que a regra que fornece o número de segmentos em qualquer posição está relacionada com a forma e a posição ordinal da figura. A fórmula obtida é transformada por operações para obter a forma canónica de expressão, $4n + 2$. Portanto esta solução está categorizada no nível 3 do RA. As tabelas 8 e 9 mostram como foi o aproveitamento nestas tarefas.

Tabela 8: Resumo de aproveitamento na alínea a) da segunda questão do Pré-teste

Sexo do Aluno			Resolução da Segunda questão alínea A					Total
			Questão Não Respondida	Raciocínio Incorrecto	Raciocínio inicial certo, mas resolução incorrecta	Raciocínio inicial Certo, mas não concluído	Raciocínio inicial Certo e resolução certa	
F	Idade do Aluno (Em Anos)	16	0	2	0	0	5	7
		17	1	1	1	1	4	8
		18	0	2	0	0	0	2
		19						
		20						
Total			1	5	1	1	9	17
M	Idade do Aluno (Em Anos)	16	1	3	0	0	10	14
		17	0	0	0	3	8	11
		18	1	1	4	1	5	12
		19	1	1	0	1	0	3
		20	0	0	0	0	1	1
Total			3	5	4	5	24	41

Total	Idade do Aluno (Em Anos)	16	1	5	0	0	15	21
		17	1	1	1	4	12	19
		18	1	3	4	1	5	14
		19	1	1	0	1	0	3
		20	0	0	0	0	1	1
	Total			4	10	5	6	33

Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

Notou-se uma certa redução na eficácia de respostas, como mostra a tabela 8, pouco mais de 56,9% dos alunos tiveram um raciocínio certo e obtiveram os termos subsequentes correctos, 18,9% tiveram um raciocínio certo, mas não tiveram sucesso no resultado final, isto é, identificaram o padrão, mas no esboço da figura esqueceram-se de eliminar os lados em comuns na junção e 24,1% dos alunos não conseguiram obter o padrão correcto na formação dos termos subsequentes da sequência.

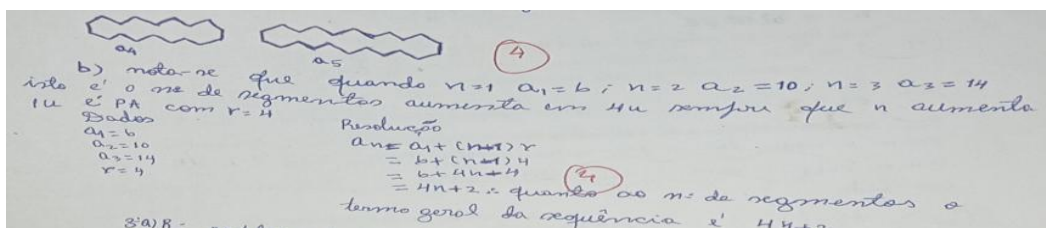
Tabela 9: Resumo de aproveitamento na alínea b) da segunda questão

Sexo do Aluno			Resolução da Segunda questão alínea B				Total	
			Questão Não Respondida	Raciocínio Incorreto	Raciocínio inicial certo, mas resolução incorrecto	Raciocínio inicial Certo, mas não concluído		Raciocínio inicial Certo e resolução certa
F	Idade do Aluno (Em Anos)	16	0	2		0	5	7
		17	1	0		1	6	8
		18	0	1		0	1	2
		19						
		20						
Total			1	3		1	12	17
M	Idade do Aluno (Em Anos)	16		5	1	0	8	14
		17		2	4	0	5	11
		18		3	1	2	6	12
		19		1	0	1	1	3
		20		0	0	0	1	1
Total				11	6	3	21	41
Total	Idade do Aluno (Em Anos)	16	0	7	1	0	13	21
		17	1	2	4	1	11	19
		18	0	4	1	2	7	14
		19	0	1	0	1	1	3
		20	0	0	0	0	1	1
Total			1	14	6	4	33	58

Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

A tabela 9 foi a consequência da tabela 8, pois quem não conseguiu obter o padrão correcto, também não consegue obter o termo geral da sequência quanto ao número de segmentos. Acredita-se que caso a sequência da tabela 6 não dependesse do padrão da alínea anterior, isto é, se a questão fosse do

tipo: determine o termo geral de sucessão 6; 10; 14; 18, ... O resultado em termos de aproveitamento seria outro, pois as tabelas 7, 13 e 14, mostram que sempre que a questão é do tipo determina o termo geral de sequências numéricas que são Progressão Aritmética e/ou Geométrica, dando os primeiros termos, os estudantes resolvem e encontram o termo geral sem quaisquer dificuldades, com a utilização de respectivas fórmulas do termo geral.



Fonte: Produção do aluno

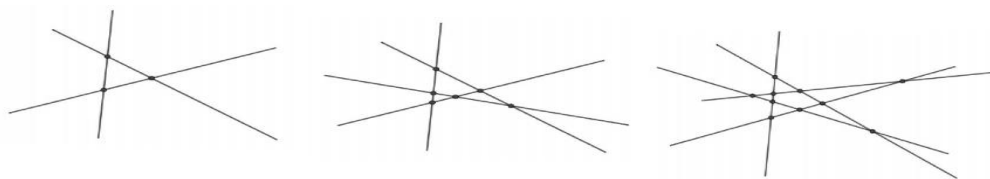
Terceira Questão - Nível do RA (Zero, três, quatro, cinco)

Consideremos três ruas em linha recta que se cruzam. Em cada cruzamento temos um candeeiro.

- Qual o número máximo de candeeiros no caso das três ruas.
- E se fossem quatro ruas? E cinco? Justifica.
- Qual seria o número máximo de candeeiros no caso de n ruas?

Aqui, pretendia-se analisar o nível de raciocínio algébrico dos alunos ao relacionar o quotidiano com o conteúdo de sucessões. A tarefa proposta é de modelação e a sua resolução, nas alíneas a) e b) manifesta o nível 0 do RA, pois não envolve nenhuma letra ou símbolo algébrico, precisa-se indicar o valor numérico (Número máximo de candeeiros), não é necessário a realização de nenhuma operação algébrica, basta utilizar a representação de um diagrama correcto. A configuração desta tarefa é de raciocínio visual. Todos os estudantes, cometeram erros na compreensão e tradução da linguagem natural para a linguagem geométrica. A solução para alínea c) manifesta o nível avançado do RA que vai do nível 3 a 5, pois a configuração da tarefa é algébrico funcional e a sua execução exige a identificação do padrão, operações algébricas. As ruas em cruzamento poderiam ser esboçados tal como indica a figura 11 abaixo:

Figura 11: Número máximo de candeeiros com 2,4 e 5 ruas



Fonte: Próprio Autor

As tabelas 10,11 e 12 reflectem o aproveitamento dos alunos nestas questões:

Tabela 10: Resumo de aproveitamento alínea a) da terceira questão

Sexo do Aluno			Resolução da Terceira questão alínea A				Total
			Questão Não Respondida	Raciocínio incorrecto	Raciocínio inicial certo, mas resolução incorrecta	Raciocínio inicial Certo e resolução certa	
F	Idade do Aluno (Em Anos)	16	2	5	0		7
		17	1	6	1		8
		18	1	1	0		2
		19					
		20					
Total			4	12	1		17
M	Idade do Aluno (Em Anos)	16	5	7	2	0	14
		17	1	8	2	0	11
		18	0	10	2	0	12
		19	1	1	1	0	3
		20	0	0	1	0	1
Total			7	26	8	0	41
Total	Idade do Aluno (Em Anos)	16	7	12	2	0	21
		17	2	14	3	0	19
		18	1	11	2	0	14
		19	1	1	1	0	3
		20	0	0	1	0	1
Total			11	38	9	0	58

Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

Tabela 11: Resumo de aproveitamento na alínea b) da terceira questão

Sexo do Aluno			Resolução da Terceira questão alínea B				Total
			Questão Não Respondida	Raciocínio incorrecto	Raciocínio inicial certo, mas resolução incorrecta	Raciocínio inicial Certo, mas não concluído	
F	Idade do Aluno (Em Anos)	16	2	5	0		7
		17	1	6	1	2	8
		18	1	1	0		2
		19					
		20					
Total			4	12	1	2	17
M	Idade	16	6	8	0	0	14

	do	17	1	9	1	0	0	11
	Aluno	18	1	9	1	1	0	12
	(Em	19	1	1	0	1	0	3
	Anos)	20	0	0	0	1	1	1
	Total		7	27	2	3	1	41
Total	Idade do	16	8	13	0	0	0	21
	do	17	2	15	2	2	0	19
	Aluno	18	2	10	1	1	0	14
	(Em	19	1	1	0	1	0	3
	Anos)	20	0	0	0	1	0	1
Total			11	39	3	5	0	58

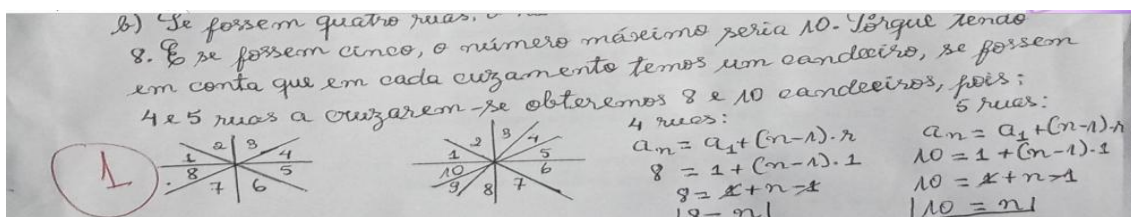
Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

Tabela 12: Resumo de aproveitamento na alínea c) da terceira questão

Sexo do Aluno			Resolução da Terceira questão alínea C				Total
			Questão Não Respondida	Raciocínio incorrecto	Raciocínio inicial certo, mas resolução incorrecta	Raciocínio inicial Certo, mas não concluído	
F	Idade do	16	2	5	0		7
	Aluno	17	1	6	1		8
	(Em	18	1	1	0		2
	Anos)	19					
		20					
Total			4	12	1		17
M	Idade do	16	7	7	0	0	14
	Aluno	17	1	9	1	0	11
	(Em	18	0	10	2	0	12
	Anos)	19	1	1	1	0	3
		20	0	1	0	0	1
Total			9	28	4	0	41
Total	Idade do	16	9	12	0	0	21
	Aluno	17	2	15	2	0	19
	(Em	18	1	11	2	0	14
	Anos)	19	1	1	1	0	3
		20	0	1	0	0	1
Total			13	40	5	0	58

Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

As tabelas 10 e 11, indicam que 19% dos alunos nem sequer se deram ao trabalho de analisar o problema e de tentar traduzir matematicamente e dos que tentaram, 65,5% tiveram um raciocínio errado, interceptando as ruas em apenas um ponto o como mostra a produção abaixo:



Fonte: Produção do aluno

O que não permite obter o número máximo de cruzamentos. A tabela 12, leva a crer que o facto de alunos não conseguirem traduzir o problema matematicamente, levou-os a cometerem erros na determinação do termo geral da sucessão 3; 6; 10; ... o que não é verdade, pois os resultados das tabelas a seguir provam o contrário.

Questão 4 - Nível do RA (três, quatro, cinco)

Apresentam-se nas alíneas seguintes, os termos de algumas sequências numéricas. Indica o termo geral para cada uma delas.

- a) $\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{4}, \dots$
 b) 8; 32; 128; 512; ...
 c) 3, 6, 10, 15, ...
 d) $-\frac{1}{2}; -3; -\frac{15}{2}; -14; -\frac{45}{2}; \dots$

Esta questão aparece com a necessidade de se poder comparar os resultados obtidos nas questões relacionados a PA e/ou PG em relação aos resultados obtidos em outras sequências. As tarefas foram enquadradas em níveis situados entre 3 e 5 do RA, pois é necessário que se identifique os respectivos padrões e operacionalizar as variáveis.

Na tabela 13 abaixo, é notório uma diminuição considerável do número de alunos que conseguiram encontrar o termo geral da sucessão, deve-se ao facto de que os alunos apresentarem ainda dificuldades nas operações com fracções, pois a sequência em causa tratava-se de PA de razão $-\frac{1}{2}$.

Tabela 13: Resumo de aproveitamento na alínea a) quarta questão

Sexo do Aluno			Resolução da Quarta questão alínea A					Total
			Questão Não Respondida	Raciocínio incorrecta	Raciocínio inicial certo, mas resolução incorrecta	Raciocínio inicial Certo, mas não concluído	Raciocínio inicial Certo e resolução certa	
F	Idade do Aluno (Em Anos)	16	3	4		0	0	7
		17	1	2		1	4	8
		18	1	0		0	1	2
		19						
		20						
Total			5	6		1	5	17
M	Idade do Aluno (Em	16	6	2	2	2	2	14
		17	2	0	1	0	8	11
		18	3	3	0	0	6	12
		19	0	0	0	0	3	3

	Anos)	20	0	0	0	0	1	1
	Total		11	5	3	2	20	41
Total	Idade	16	9	6	2	2	2	21
	do	17	3	2	1	1	12	19
	Aluno	18	4	3	0	0	7	14
	(Em	19	0	0	0	0	3	3
	Anos)	20	0	0	0	0	1	1
Total			16	11	3	3	25	58

Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

Tabela 14: Resumo de aproveitamento na alínea a) quarta questão

Sexo do Aluno			Resolução da Quarta questão alínea B					Total
			Questão Não Respondida	Raciocínio incorrecta	Raciocínio inicial certo, mas resolução Errada	Raciocínio inicial Certo, mas não concluído	Raciocínio inicial Certo e resolução certa	
F	Idade	16		0	0	1	6	7
	do	17		0	1	1	6	8
	Aluno	18		1	0	0	1	2
	(Em	19						
	Anos)	20						
Total			1	1	2	13	17	
M	Idade	16	2	0	0	2	10	14
	do	17	2	0	0	0	9	11
	Aluno	18	2	0	2	1	7	12
	(Em	19	0	1	0	0	2	3
	Anos)	20	0	0	0	0	1	1
Total			6	1	2	3	29	41
Total	Idade	16	2	0	0	3	16	21
	do	17	2	0	1	1	15	19
	Aluno	18	2	1	2	1	8	14
	(Em	19	0	1	0	0	2	3
	Anos)	20	0	0	0	0	1	1
Total			6	2	3	5	42	58

Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

A tabela 14, mostra que uma boa parte dos alunos conseguem determinar o termo geral da PG, a parte ínfima que infelizmente não encontrou o resultado desejado, foi por erros de cálculo e não por desconhecer o tipo de sucessão. Para confirmar a nossa suspeita de que quando se trata de sucessão que não são PA nem PG, os alunos não conseguem encontrar o termo geral, elaborou-se as duas últimas tarefas em que as tabelas 15 e 16 mostram como foi o aproveitamento

Tabela 15: Resumo de aproveitamento na alínea c) quarta questão

Sexo do Aluno			Resolução da Quarta questão alínea C			Total
			Questão Não Respondida	Raciocínio incorrecto	Raciocínio inicial certo, mas resolução incorrecta	
F	Idade do Aluno (Em Anos)	16	4	3	0	7
		17	3	4	1	8
		18	0	2	0	2
		19				
		20				
	Total		7	9	1	17
M	Idade do Aluno (Em Anos)	16	8	6	0	14
		17	6	5	0	11
		18	6	6	0	12
		19	1	2	0	3
		20	0	0	1	1
	Total		21	19	1	41
Total	Idade do Aluno (Em Anos)	16	12	9	0	21
		17	9	9	1	19
		18	6	8	0	14
		19	1	2	0	3
		20	0	0	1	1
	Total		28	28	2	58

Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

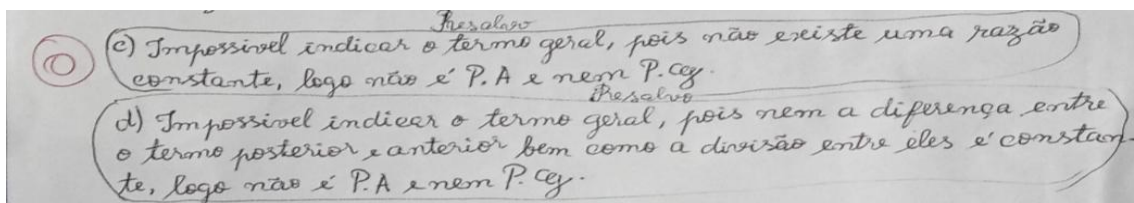
Tabela 16: Resumo de aproveitamento na alínea d) quarta questão

Sexo do Aluno			Resolução da Quarta questão alínea D				Total
			Questão Não Respondida	Raciocínio incorrecto	Raciocínio inicial certo, mas resolução incorrecta	Raciocínio inicial Certo e resolução certa	
F	Idade do Aluno (Em Anos)	16	4	1	1	1	7
		17	3	4	1	0	8
		18	1	1	0	0	2
		19					
		20					
	Total		8	6	2	1	17

M	Idade do	16	8	5	1	0	14
	Aluno	17	8	3	0	0	11
	(Em	18	7	5	0	0	12
	Anos)	19	1	2	0	0	3
		20	0	0	1	0	1
	Total			24	15	2	0
Total	Idade do	16	12	6	2	1	21
	Aluno	17	11	7	1	0	19
	(Em	18	8	6	0	0	14
	Anos)	19	1	2	0	0	3
		20	0	0	1	0	1
	Total			32	21	4	1

Fonte: Saída do software. Adaptado pelo próprio

Para a sucessão 3, 6, 10, 15, ..., apenas um aluno conseguiu encontrar o termo geral, quase todos responderam que:



Fonte: Produção feita por um aluno

Já para a sucessão: $-\frac{1}{2}$; -3 ; $-\frac{15}{2}$; -14 ; $-\frac{45}{2}$; ... , nenhum dos alunos indicou o termo geral correcto.

Feitas as análises da prestação dos alunos na resolução do pré-teste, o gráfico da figura 10, mostra que os alunos conseguem determinar termo geral de Progressões Aritméticas e/ou Geométricas usando as respectivas fórmulas de termos gerais, mas para termos gerais de sucessões que não são Progressão Aritmética e nem Geométrica, apresentam dificuldades para determinar o respectivo termo geral, mostrando indícios de um fraco desenvolvimento do RA. A estrutura representativa em traduzir matematicamente um problema, pode apresentar-se como complexa em termos de leitura e de interpretação por isso pede-se um trabalho apurado e um empenho cognitivo por parte de todos envolvidos. Isso pode ser visto como uma condição importante para se poder analisar que conhecimentos os alunos possuem para encontrarem o termo geral de sucessões sem no entanto que seja necessário recorrerem a fórmulas, que habilidades devem possuir para o efeito? O trabalho para o aumento do Nível de RA, pode auxiliar na criação de habilidades. Por exemplo como

encontrar o termo geral de progressão aritméticas e/ou geométricas sem o uso das respectivas fórmulas? Os resultados obtidos mostram que o professor como o orientador do processo de ensino e aprendizagem deve trabalhar situações que levam o aluno a usar o raciocínio de como proceder para determinar o termo geral de sucessões sem que seja necessário o recurso a fórmulas.

Ainda foi possível observar a maneira como a eficácia na obtenção dos termos gerais de sucessões foi variando com dependência ao tipo de sequências (Aritmética, Geométrica ou outras). Para minimizar as dificuldades apresentadas, é preciso que se trabalhe mais assuntos relacionados com termos gerais de sucessões que não são PA nem PG, trabalhando assim o raciocínio algébrico dos alunos.

3.2- Actividades desenvolvidas no âmbito da proposta

No decorrer da investigação, foram desenvolvidas um total de dez aulas em duas semanas (de 29 de Maio à 12 de Junho de 2023), com um grupo de 58 alunos da escola de Formação de Professores, seleccionados tal como foi referido na introdução por uma amostragem não probabilística (por julgamento), pois precisava-se trabalhar com um grupo que pudesse garantir um nível aceitável de conhecimentos relativos a termos gerais de sucessões. Com o objectivo de encontrar estratégias que pudessem auxiliar na determinação do termo geral de sucessões que não são PA nem PG, o grupo foi dividido em dois subgrupos (11.^a Classe e 12.^a classe), para se evitar um número elevado de alunos em uma turma.

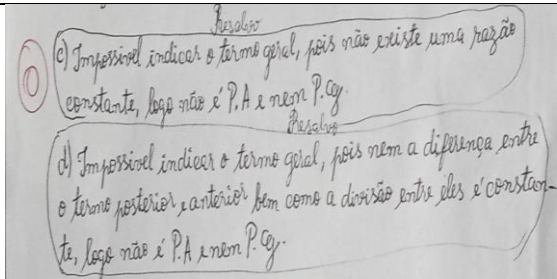
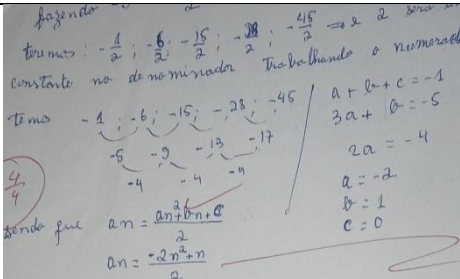
Mas muito antes da intervenção, no dia 06 de Maio, aplicou-se um pré-teste para medir o nível de conhecimento dos alunos, cujos resultados foram apresentados no ponto 3.1. As tarefas propostas e tratadas na intervenção, foram todas resolvidas (Ver capítulo II) sob a orientação do professor e estavam voltadas para a determinação do termo geral de sucessões por vias da decomposição de termos da sucessão, determinação dos parâmetros e a representação gráfica.

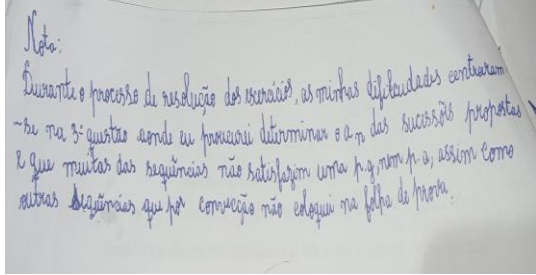
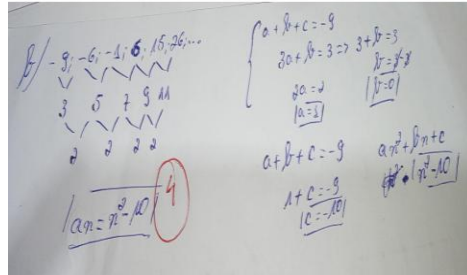
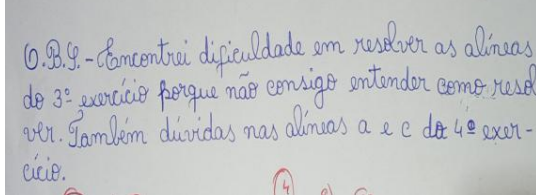
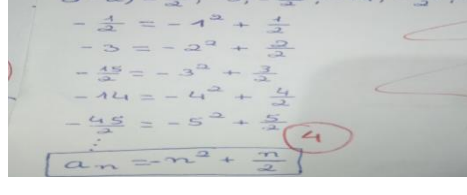
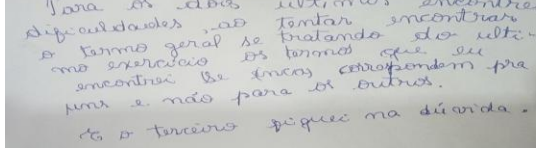
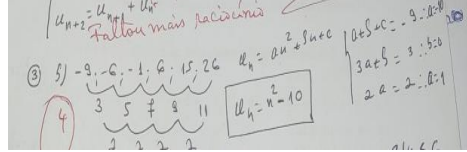

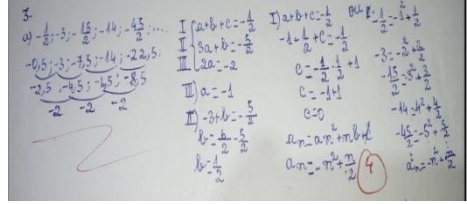
Na decomposição de termos da sequência, teve como conhecimentos prévio, termos gerais de números naturais, termos gerais de sucessões constantes, termos gerais de sucessões quase constante, pois a ideia básica é decompor

os termos da sequência, em sequências de operações básicas. Na determinação dos parâmetros, pretendia-se que os alunos desenvolvessem habilidades na descoberta de tipo de sucessões, partindo das diferenças de termos consecutivos serem iguais (PA), as diferenças consecutivas das diferenças dos termos ser constante (expressão do tipo $an^2 + bn + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$) ou outro tipo de expressão polinomial.

Na representação gráfica, encontrou-se dificuldades por falta de meios de ensino (computadores) à escola e aos alunos para representar graficamente sucessões no GeoGebra. Por isso, o professor representava as funções no GeoGebra e de seguida projectava para a observação e análise dos alunos na descoberta do tipo de funções pela trajectória da sequência dos pontos. As três vias apresentadas, foram abordadas para auxiliar na promoção do RA dos alunos em conhecimentos relativos a determinação do termo geral de PA ou PG. Após a intervenção pedagógica, aplicou-se um outro teste denominado pós-teste no dia 13 de Junho para a medição do nível de conhecimento atingido pelos alunos e em seguida compará-los com os obtidos no pré-teste como mostra a tabela abaixo:

Tabela 17: Produções de 5 alunos em tarefas relacionadas com sucessões que não são PA nem PG no pré-teste e no pós-teste.

Aluno	Pré-teste	Pós-teste
A1	 <p>O aluno no pré-teste, responde que é impossível determinar o termo geral de sucessão que não é PA nem PG</p>	 <p>O mesmo aluno no pós-teste, na tarefa do mesmo género resolve e encontra o termo geral da sucessão.</p>

<p>A2</p>	 <p>O aluno no pré-teste, afirma encontrar dificuldade, pois a sucessão em causa não é PA</p>	 <p>O mesmo aluno ultrapassa as dificuldades encontradas e determina o termo geral da sucessão que não é PA.</p>
<p>A3</p>	 <p>O aluno mostra que tem dificuldades na determinação do termo geral de sucessões que não são PA nem PG</p>	 <p>O mesmo aluno no pós-teste efectua a decomposição de termos e consegue encontrar o termo geral da sucessão que não é PA nem PG</p>
<p>A4</p>	 <p>O aluno no pré-teste, mostra dificuldades para determinar o termo geral da sucessão que não é PA</p>	 <p>O mesmo aluno no pós-teste, ultrapassa as dificuldades encontradas no pré-teste</p>
<p>A5</p>	 <p>O aluno no pré-teste nem sequer se aventurou em tentar resolver.</p>	 <p>No pós-teste, o mesmo aluno demonstra um nível diferente</p>

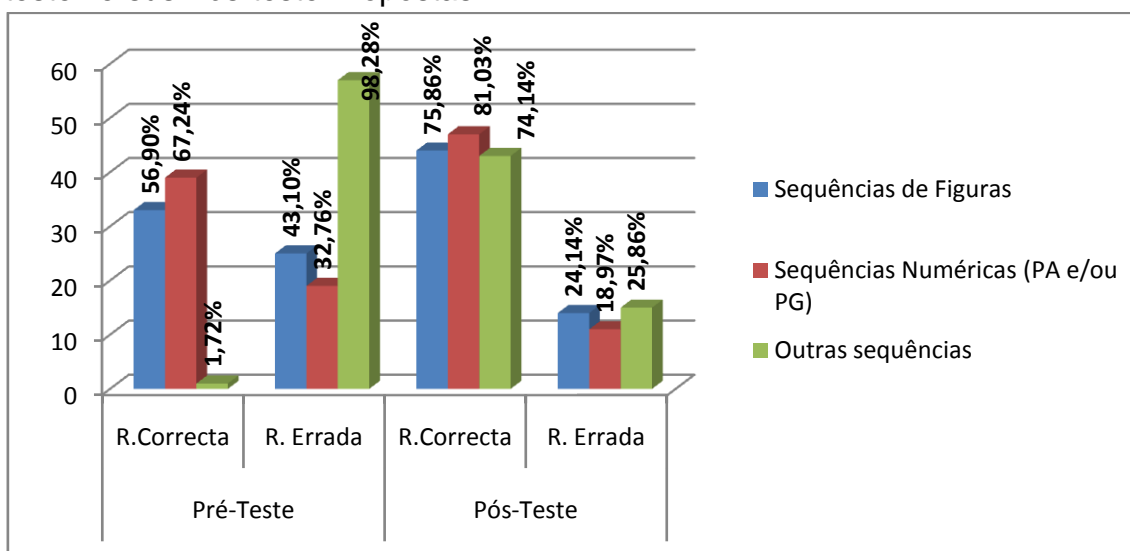
Fonte: As produções dos alunos no pré-teste e no pós-teste

Como se pode verificar na tabela 14, os resultados obtidos por 5 alunos nos dois testes, mostram que para os alunos, só era possível determinar o termo geral de PA e/ou PG, caso que não acontece com sucessões que não são PA nem PG, o que indica que existia uma certa limitação em termos de RA dos alunos em causa, situação esta que foi alterada após a intervenção.

3.3- Comparação entre os resultados do pré-teste e os do pós-teste

A exploração matemática, a descoberta de estratégias, a tentativa e o erro são, assim, processos inerentes à investigação Matemática e imprescindíveis à sua criação e ao seu próprio desenvolvimento. A este respeito, Ponte (2003), afirma que investigar em Matemática é descobrir relações entre objectos matemáticos conhecidos, procurando identificar e provar as respectivas propriedades. Sendo assim, depois da experiência pedagógica compartilhada com alunos, na tentativa de transmitir a estratégia que está sendo alvo deste estudo, aplicou-se um pós teste no sentido de se analisar o nível de raciocínio atingido pelos alunos e compará-los com os resultados do pré-teste. Para o efeito de comparação, dividiu-se as tarefas em três partes (Sequências de figuras, sequências numéricas que são PA e/ou PG e outras sequências) o gráfico abaixo mostra os resultados obtidos:

Figura 12: Gráfico Comparativo do desempenho dos alunos em Tarefas do pré-teste versus Pós-teste Propostas



Fonte: Adaptado pelo Próprio autor.

De acordo com os resultados do gráfico, houve um crescimento notório do pré-teste para pós-teste, tanto em tarefas de sequências figurativas como em sequências numéricas. O resultado obtido, mostra que:

- Os alunos já apresentavam algum conhecimento em sucessões, mas um conhecimento que se limita apenas em progressão Aritmética e/ou Geométrica;

- A Estratégia pedagógica partilhada com os alunos foi satisfatória, pois os alunos melhoraram no aproveitamento em sucessões que não são PA nem PG, por exemplo, nenhum aluno acertou os itens (c) da terceira questão e (c) da quarta questão e apenas dois alunos acertaram o item (d) da quarta questão do pré teste ao determinar termo geral de sucessões que não são PA nem PG, mostrando que não tinham um conhecimento de sucessões que vai além de progressão Aritmética e/ou Geométrica.
- Após a intervenção (a experiência pedagógica partilhada), os resultados do pós-teste mostram uma evolução em termos de raciocínio algébrico, em determinar o termo geral de sucessões de diferentes tipos.

3.3.1- Estatísticas da amostra na comparação do aproveitamento do Pré-Teste e Pós-Teste

Interessava-se averiguar a variação do aproveitamento dos alunos em tarefas relacionadas com sucessões que não são PA e/ou PG aplicadas no pré teste e no pós teste numa escala de 0 (Tarefas não resolvidas) a 4 (Tarefas resolvidas de forma correcta). A tabela 18 abaixo, indica valores estatísticas resultantes da amostra de aproveitamento dos alunos em tarefas com sucessões que não são PA e/ou PG, nos dois testes

Tabela 18: Estatísticas da Amostra

		Aproveitamento no pós-teste	Aproveitamento no Pré-teste
N	Válido	58	58
	Ausente	0	0
Média		3,420	0,595
Mediana		3,333	0,500
Moda		3,330	0,00
Desvio Padrão		0,532	0,672
Assimetria		-0,790	1,079
Intervalo		2,00	2,50
Mínimo		2,00	0,00
Máximo		4,00	2,50
Soma		198,33	34,50

Fonte: Output do software SPSS.

É possível verificar no pós-teste, que em média os alunos tiveram um aproveitamento de 3,42, a dispersão em torno da média do aproveitamento neste teste, é relativamente baixa (desvio padrão de 0,532) e os aproveitamentos estão compreendidos entre 2 e 4, variando no máximo em

dois valores. Por outro lado, a média é ligeiramente superior aos valores da mediana e da moda, indicando uma distribuição quase simétrica, apresentando uma ligeira assimetria. Mas também pode-se verificar que o valor da soma de todos os aproveitamentos dos alunos no pós-teste é de 198,33 que corresponde a mais de 85% de aproveitamento. A situação por sua vez é bem diferente no pré-teste, pois observa-se uma média de aproveitamento de 0,595, a dispersão em torno da média relativamente baixa. Pode-se observar ainda que o aproveitamento variou de 0 a 2,5 e soma dos aproveitamentos dos 58 alunos é de apenas 34,5, correspondendo a cerca de 15% de aproveitamento. Sendo assim é notório a diferença entre os resultados obtidos no pré-teste e o no pós- teste, mostrando que a proposta apresentada teve um efeito positivo em termos de conhecimentos relacionados a determinação de termos gerais de sucessões que não são PA nem PG.

3.4- Análise de entrevista realizada a professores

No sentido de se poder Analisar as perspectivas dos professores de como encaram o conhecimento dos alunos na obtenção do termo geral de sucessões que não são PA e/ou PG e a representação gráfica de sucessões, fez-se uma entrevista a 5 professores da Escola de Formação de Professores, todos eles licenciados e com mais de 4 anos de experiências de professorado nesta Instituição. As respostas obtidas foram registadas, codificadas e resumidas na tabela 19.

Tabela 19: Resumo da Entrevista realizada aos Professores

Entrevistado/Resposta (E ₁)	
Questão 1	Raramente os alunos conseguem encontrar o termo geral de sucessões sem recurso a fórmulas do termo geral, porque não tratamos do assunto
Questão 2	Nunca tratamos em reuniões de treinamento
Questão 3	O assunto relacionado com o termo geral de PA ou PG, já tratamos, mas outro tipo de sucessão não. A Representação gráfica é um assunto que temos tratado, mas não fizemos uma análise do gráfico obtido
Questão 4	Os alunos claramente apresentam grandes dificuldades para determinar o termo geral de sucessões que não são PA nem PG, tal como fiz referência anteriormente, deve-se ao facto de não se tratar do assunto
	Uma aula com recurso tecnológico podem ser mais atraentes, pois possibilitam ao aluno observar, raciocinar, desenvolver, como por

Questão 5 (Extra)	exemplo o caso de representação gráfica de sucessões
Entrevistado/Resposta (E₂)	
Questão 1	Não é preciso que eles tenham o termo geral para poder determinar o termo geral, mas por ser uma questão que não tratado Porque os próprios objectivos fornecidos pelo programa não trazem este tipo de assunto
Questão 2	Nas reuniões pedagógicas o assunto não é tratado, pois não está programado
Questão 3	Não. A representação gráfica dificilmente se trata do assunto
Questão 4	Nunca tratamos deste assunto, mas penso que tem grandes dificuldades
Questão 5 (Extra)	
Entrevistado/Resposta (E₃)	
Questão 1	Os meus alunos conseguem encontrar o termo geral de PA, PG, sem recurso a fórmulas habitual, mas ao tratar de outro tipo de sucessões ai começam as dificuldades
Questão 2	Em nenhuma ocasião se tratou deste assunto nas reuniões pedagógicas
Questão 3	Apesar não ser frequente, já se falou do assunto, mas não temos uma bibliografia sólida para seguir, quanto a representação gráfica não sinto que é muito importante
Questão 4	Quando o assunto é encontrar o termo geral de sucessões que não são PA nem PG, a descoberta do padrão para alunos é muito difícil
Questão 5 (Extra)	A utilização de diferentes formas de se tratar um assunto pode ajudar até mesmo na capacidade de análise dos próprios alunos
Entrevistado/Resposta (E₄)	
Questão 1	Os alunos sem a fórmula parece ser impossível encontrarem o termo geral de sucessões
Questão 2	Nunca se tratou deste assunto em reuniões pedagógicas
Questão 3	Nunca tratamos deste assunto com os meus alunos, o que temos feito é simplesmente demonstrar ao surgimento da fórmula. A representação gráfica é feita apenas no princípio sem no entanto uma grande importância
Questão 4	Nunca experimentei, mas a tempo houve um concurso da AGT, cujas questões de Matemática estavam baseadas em seqüências e notou-se dificuldades sérias para a interpretação
Questão 5 (Extra)	Os alunos sem a fórmula parece ser impossível encontrarem o termo geral de sucessões
Entrevistado/Resposta (E₅)	
Questão 1	Os alunos não conseguem determinar porque é uma questão que se trata na sala de aulas

Questão 2	Nunca se tratou, pois é um assunto que não se tem levado em conta
Questão 3	Não, pois nunca tive contacto com uma bibliografia a tratar do assunto. Nunca representamos pois não me parece muito importante
Questão 4	Penso que sim, pois não encontrei ainda uma fórmula possível para determinar o termo geral de outras sucessões
Questão 5 (Extra)	Os alunos não conseguem determinar porque é uma questão que não se trata na sala de aulas

Fonte: Criação do Próprio Autor

Da entrevista realizada aos professores, foi extraída quatro categorias de Níveis de raciocínio algébrico onde se enquadra o conhecimento dos seus alunos (nível baixo, nível intermédio, nível de consolidação e nível alto). De acordo com os temas predominantes nos relatos dos cinco professores, quase todos mostram que os alunos conseguem determinar o termo geral de PA e/ou PG, mas que nunca se tratou de situações de determinação de termos gerais de sucessões que não são PA nem PG. Quanto a representação gráfica alguns professores referiram que tratam simplesmente como ilustração e que não entram com grandes detalhes. De forma sintetizada, as respostas obtidas foram categorizadas na tabela 20, e que serviram de indicador para o enquadramento em um nível de RA, segundo Godino et al., (2015).

Tabela 20: Categorias de Níveis de RA extraídos nos relatos dos professores

Categoria de situações	Frequência
RA de nível Baixo (0 e 1)	0
RA de nível Intermédio (2)	8
RA do nível consolidado (3)	17
RA de nível Alto (4 a 6)	0
TOTAL	25

Fonte: Criação do Próprio Autor

Com a tabela 20, facilmente percebe-se que o raciocínio algébrico dos alunos sobre a responsabilidade dos professores entrevistados, já se encontra no nível consolidado do RA, mas que precisa desenvolver para o nível mais elevado, pois, quase todos mostram que os alunos conseguem determinar o termo geral de sucessões que são PA e/ou PG com fórmulas devidas, mas que não são capazes de determinar um termo geral de sucessões quando as mesmas não são PA e nem PG, mostrando a grande dificuldade que os alunos têm na determinação do termo geral de sucessões e que é preciso uma intervenção no sentido.

Conclusão do capítulo

Os dados que foram apresentados neste capítulo, mostram que:

- 1- As estratégias apresentadas, claramente podem auxiliar a potenciar o RA dos alunos, dando deste modo as directrizes necessárias para a obtenção do termo geral de sucessões que não são PA nem PG;
- 2- O nível de RA demonstrado pelos alunos na determinação de termos gerais de sucessões situava-se entre nível 0 a 3;
- 3- O nível atingido na determinação do termo geral de sucessões após a acção formativa está entre 0 a 5.

CONCLUSÕES GERAIS E SUGESTÕES

Conclusões gerais

Na abordagem do tema que foi alvo desta investigação, que é a proposta de estratégias algébricas para a obtenção do n - ésimo termo de sucessão que auxilie também no desenvolvimento do RA dos alunos e tendo em conta a hipótese formulada, conclui-se o seguinte:

- 1- O nível do RA demonstrado pelos alunos no começo do estudo encontrava-se entre os níveis 0 a 3;
- 2- O programa de Matemática da 11.^a Classe, não dá grande destaque em sucessões que não são PA e/ou PG, limitando assim o aprendizado dos alunos;
- 3- Os resultados do pré-teste e de entrevista dirigida aos professores, dão ideia de que o ensino de sucessões em Angola assenta-se na determinação do termo geral de PA e PG, pois os alunos mostraram conhecimentos sólidos nestas sequências, outrossim, pareceu que para os alunos, só é possível determinar os termos gerais de sucessões que são PA e/ou PG, mostrando assim uma certa limitação em outras sucessões;
- 4- Os resultados obtidos no pós-teste, mostram que com a orientação, é possível promover o nível de RA dos alunos, ultrapassando assim as dificuldades sentidas no início da investigação e que a proposta apresentada também auxilia na promoção do raciocínio dos alunos na determinação de termos gerais de qualquer sucessão;
- 5- Os pontos conclusivos identificados anteriormente, levam a confirmar que a falta de orientações está na base das dificuldades apresentadas pelos alunos na determinação de termos gerais de sucessões que não são PA nem PG, pois o aproveitamento obtido no pós-teste mostra que depois da orientação, os alunos foram capazes de determinar o termo geral de sucessões que não são progressão Aritmética e/ou Geométrica;
- 6- O resultado deste trabalho mostra que existe uma efectiva necessidade de os alunos terem uma formação adequada que lhes permita desenvolver as competências didáctico - matemáticas em actividades que envolvem o raciocínio algébrico, básico e secundário;

Sugestões para futuros trabalhos

Este trabalho explorou aspectos relacionados com a determinação do termo geral de sucessões que não são Progressão Aritméticas e nem Geométricas e analisou o nível de RA dos alunos no assunto em causa. Todavia, considerando a diversidade de sequências e a limitação do estudo, apenas foi possível explorar sucessões do tipo polinomial de até terceiro grau, faltando assim as sucessões do tipo exponencial.

A acção formativa realizada no âmbito do desenvolvimento deste trabalho, permitiu responder as questões de investigação, dadas as dificuldades detectadas nos alunos no princípio do estudo na determinação do termo geral de diferentes tipos de sucessões, daí sugere-se aos professores os seguintes aspectos:

- 1- O conhecimento dos processos de raciocínio dos seus alunos e que façam uma reflexão sobre tais processos. Se esta reflexão revelar lacunas no desenvolvimento do raciocínio dos alunos, mesmo de aqueles que mostram bom desempenho, será necessário que sejam colmatadas para que estes sejam mais críticos e desenvolvam uma Matemática com compreensão e com um nível de RA desejado;
- 2- Com as estratégias apresentadas nesse trabalho, espera-se que se tenha desenvolvido uma proposta que motive professores na investigação de outras formas de determinar termos gerais de sucessões;
- 3- O marco deste trabalho deve ser aproveitado para consulta dos professores na preparação das suas lições ligadas ao tema sucessões e para a elaboração de futuros trabalhos;

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Referências Bibliográficas

1. Aké, L., P. (2013). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación*. [Tese de Doutoramento, Faculdade de Ciências de Educação da Universidade de Granada]. Repositório aberto da Universidade de Granada. <http://hdl.handle.net/10481/31332>
2. Alarcão, I. (2001). Professor investigador: Que sentido? Que formação. *Formação Profissional de Professores no Ensino Superior*, 1, 21 – 30.
3. Aliseda, A., (2003). Mathematical reasoning vs. Abductive reasoning. *A Structural Approach. Synthese*, 134, 25–44. <https://doi.org/10.1023/A:1022127429205>
4. Angola, Ministério de Educação - Instituto Nacional de Investigação e Desenvolvimento de Educação (2013). *Programa de Matemática da 11ª Classe das Escolas de Formação de Professores do I Ciclo*. (2nd ed.). Editora Moderna, S.A.
5. Branco, N., C., V.(2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores dos primeiros anos*. [Tese de Doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório aberto da Universidade de Lisboa. <http://hdl.handle.net/10451/8860>
6. Brasil, Secretaria de Educação Fundamental (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental – Matemática*.
7. Breda, A., Font, V. & Fan, L., R., P. (2018). Critérios valorativos y normativos em la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidade didáctica. *Bolema*, 32 (60), 255–278: <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
8. Canavarró, A., P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 16(2), 81–118. <http://rdpc.uevora.pt/handle/10174/4301>
9. Font, V., Godino J., D. & Planas, V. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación Matemática. *Infancia y aprendizaje*, 33 (1), 89–105. <https://www.researchgate.net/publication/282325707>

10. Font, V., Godino, J., D. & Gallardo, J. (2013). A emergência de objectos a partir de práticas matemáticas. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97–124. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0>
11. Godino J., D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Iberoamericana de Educación Matemática*, 5 (20), 13–31
12. Godino, J., D., Aké, L., P., Gonzato, M. & Wilhelmi, M., R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32 (1), 199-219. <https://doi.org/10.5565/ensciencias.965>
13. Godino, J., D., Neto, T., Lasa, A., Wilhelmi, M., R., Aké, L., & Etchegaray, S. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas Matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 1–21. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8 .105>
14. Groenwald, C., L., O. & Becher, E., L. (2010). Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano do ensino médio. *Educação Matemática Pesquisa*, 12 (2), 242–270
15. Gungula, E., W. & Faustino, A. (2018). Dilema da formação matemática em Angola: falta de iniciativas próprias ou de compromisso com a qualidade de ensino? *Actualidades Investigativas en Educación*, 18 (3), 1–22
16. Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Périgo, R. (2007). *A Matemática volume único*. (4.ª ed.). Actual editora.
17. Lannin, J., Ellis A., B. & Elliot, R. (2011). *Developing Essential understanding of Mathematical reasoning for teaching Mathematics in Prekindergarten-grade 8*. Reston: NCTM
18. Lithner, J. (2008). A research Framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in mathematics*, 67, 255–276 <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2>
19. Lourenço, A., Correia, J. & Martins P., M., M. (2014). *Metodologias da Matemática e da Física*. Plural Editores, Grupo Porto Editora.
20. Marconi, M., A. & Lakatos, E., M. (2003). *Fundamentos de Metodologia Científica*. (5.ª Ed.). Editora Atlas S.A.

21. Ministério de Educação de Timor-Leste, (2013). *Manual do aluno 11.º ano de escolaridade*. (1.ª Ed.). Esfera Crítica Unipessoal, Lda.
22. Montiel, M., Wilhelmi, M.R., Vidakovic, D. & Elstak, I. (2009). Usando a Abordagem Ontossemiótica para identificar e analisar o significado matemático ao transitar entre diferentes sistemas de coordenadas num contexto multivariado. *Estudos Educacionais em Matemática*, 72 (2), 139–160. <https://doi.org/10.1007/s10649-009-9184-2>
23. Nogueira, I., C. & Neto, T. (2017). Indicadores de idoneidade didáctica em contexto de formação inicial de professores: o caso da Ana. In L. Menezes, A. Ribeiro, H., Gomes, A., P., Martins, F. Tavares & H. Pinto (Eds.), *Acta do XXVIII Seminário de Investigação em Educação Matemática. Associação de Professores de Matemática, Viseu*, 142–153
24. Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica*. [Dissertação de Mestrado não publicada]. Universidade de Lisboa.
25. Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática*, 100 (1), 3–9.
26. Pacheco, J. & Pereira, N. (2007). Estudos Curriculares. *Revista Belo Horizonte*, 45 (1), 197–221
27. Pereira, J., M. & Ponte, J., P. (2011). Raciocínio matemático em contexto algébrico: uma análise com alunos de 9.º ano. In: *Acta do encontro de investigação em educação matemática, Póvoa do Varzim*, 347-364.
28. Ponte, J., P. (2003). Investigar sobre investigações matemáticas em Portugal. *Investigar em Educação*, 93 – 169
29. Ponte, J., P. (2009). O Novo Programa de Matemática como oportunidade de Mudança para os Professores do Ensino Básico. *Instituto de Educação*, 1 (12), 96–114.
30. Ponte, J., P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Educação e Matemática*, 100 (1), 89–96.
31. Programa de Educação Tutorial Matemática da Universidade Federal de Santa Maria (2016). *Mini curso de GeoGebra*. UFSM.
32. Queria, M., B., Barros, J., M., M. (2020). *Didáctica da Matemática: Teoria e Aplicações*. (Vol.I). Edições Eco7.

33. Radford, L. (2010). Camadas de generalidade e tipos de generalização em actividades padrão. *PNA, Granada*, 4 (2), 37–62.
34. Radford, L. (2013). Em torno de três problemas de generalização. In L. Rico; MCCañadas; J. Gutierrez; M. Molina; Segóvia (eds). *Pesquisa em Didáctica da Matemática. Homenagem a Encarnação Castro. Granada: Comares*, 3–12.
35. Rivera, F. & Becker, J. (2009) Algebraic reasoning through patterns. *Mathematics Teacher in the Middle School. Reston*, 15 (4), 212 – 221.
36. Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school : Students' access to significant mathematical ideas . In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*. 1(1), 143–161.
37. Rooney, A. (2012). *A História da Matemática: Desde a criação das Pirâmides até a exploração do infinito*. M. Books do Brasil Editora Ltda
38. Saraiva, M., J. & Teixeira, A., M. (2009). Secondary school students' understanding of function via exploratory and investigative tasks. *Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento*, 4 (19), 74–83.
39. Silva, R., R., C. (2011). *Desenvolvimento do Raciocínio Algébrico*. [Dissertação de Mestrado não publicada]. Universidade Estadual de Paraíba.
40. Suharman, L., Y., W, Neto, T., B. (2016). O Raciocínio Algébrico de futuros professores de Matemática em Timor - Leste: análise de um inquérito por questionário. *vidya*, 36 (1), 135-160.
41. Suharman, L., Y., W. (2018). *Raciocínio algébrico na formação inicial de professores em Timor-Leste*. [Tese de Doutoramento, Departamento de Educação e Psicologia da Universidade de Aveiro]. Repositório aberto da Universidade do Aveiro. <http://hdl.handle.net/10773/24707>
42. Van de Walle, J., A. (2009). *Matemática no ensino fundamental Formação de professores e aplicação em sala de aula*. (6.ª Ed.). Penso.
43. Vergel, R. (2015). Generalização de padrões e formas de pensamento algébrico inicial. *PNA, Granada*, 9 (3), 193-215.

APÊNDICES

Enunciado do Pré-Teste

Disciplina: Matemática

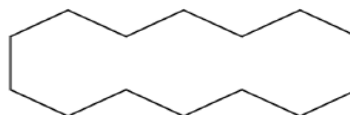
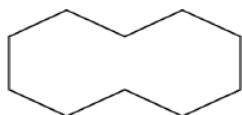
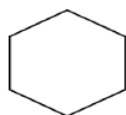
Caro estudante,

Este teste tem por objectivo, verificar o nível de conhecimento, compreensão e criatividade existente na determinação de termos gerais de sucessões.

Nome:

Data: 06 de Dezembro de 2022

- 1- Considera uma sequência de figuras compostas por quadrados, sendo a 1ª figura composta por 6 quadrados, a 2ª figura por 8 quadrados, a 3ª figura por 10 quadrados e assim sucessivamente. Determina o termo geral da sequência
- 2- As figuras seguintes representam os três primeiros termos de uma sequência.



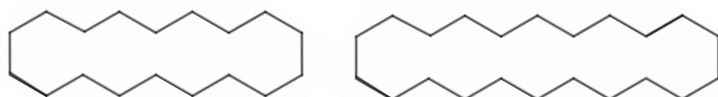
- a) Representa os dois termos seguintes da sequência.
 - b) Identifica o termo geral desta sequência quanto ao número de arestas.
- 3- Consideremos três ruas em linha recta que se cruzam. Em cada cruzamento temos um candeeiro.
 - e) Qual o número máximo de candeeiros no caso das três ruas.
 - f) E se fossem quatro ruas? E cinco? Justifica.
 - g) Qual seria o número máximo de candeeiros no caso de n ruas?
 - 4- Apresentam-se nas alíneas seguintes, os termos de algumas sequências numéricas. Indica o termo geral para cada uma delas.
 - a) $\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{4}, \dots$
 - b) 8; 32; 128; 512; ...
 - c) 3, 6, 10, 15, ...
 - d) $-\frac{1}{2}; -3; -\frac{15}{2}; -14; -\frac{45}{2}; \dots$

Resolução do enunciado do pré-teste

1- A sequência é dada da seguinte forma: 6; 8, 10, ... que é o mesmo dizer que a sucessão tem 6 como o seu primeiro termo, 8 o segundo, 10 o terceiro termo. Os termos estão em progressão aritmética crescente de razão 2, cujo termo geral será dada por $T_n = 2n + 4$. Em que n indica a ordem da figura e T_n o número de quadrados.

2- Analisando a sequência, pode-se notar que as figuras a seguir são obtidas acrescentando do lado direito da figura anterior, um hexágono, mas eliminando o segmento da união. Dai que as próximas figuras serão

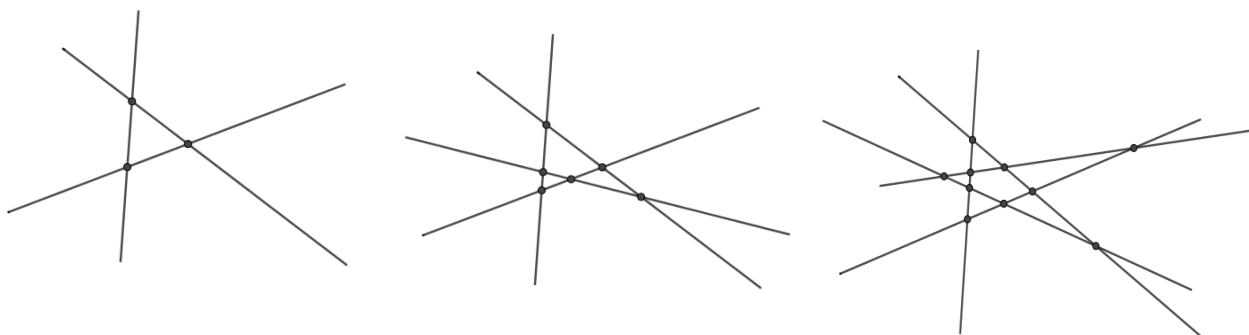
a)



b) Quanto ao número de arestas, teríamos uma sequência de figuras em que a primeira figura apresenta 6 arestas, a segunda 10 arestas, a terceira 14 arestas, a quarta 18 arestas, a quinta 22 arestas e assim por adiante, isto é, a sucessão seria: 6; 10; 14; 18; 22 ..., cujo termo geral é dada por: $b_n = 4n + 2$, onde n indica a ordem da figura e b_n a número de arestas.

3- Consideremos três ruas em linha recta que se cruzam. Em cada cruzamento temos um candeeiro.

a) Já que as três ruas se cruzam, teríamos como mostram as figuras abaixo no máximo três candeeiros.



b) No caso de quatro ruas, teríamos no máximo 6 Candeeiros e em cinco ruas teríamos no máximo 10 candeeiros. Note que o número

de candeeiros podem diminuir caso haja um cruzamento com mais duas ruas.

- c) No caso de n ruas, o número máximo de candeeiros seria dado pela expressão:

$T_n = \frac{1}{2}n(n - 1)$, Sendo n o número de ruas em linhas rectas que se cruzam e T_n o número máximo de candeeiros

4- Apresentam-se nas alíneas seguintes, os termos de algumas sequências numéricas. Indica o termo geral para cada uma delas.

a) $\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{4}, \dots$ Tem como termo geral $a_n = \frac{3}{4} - \frac{n}{2}$

b) 8; 32; 128; 512; ... Tem como termo geral $b_n = 2^{2n+1}$

c) 3, 6, 10, 15, ... Tem como termo geral $C_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$

d) $-\frac{1}{2}; -3; -\frac{15}{2}; -14; -\frac{45}{2}; \dots$ Tem como termo geral $d_n = -n^2 + \frac{1}{2}n$

Enunciado do Pós-Teste

Disciplina: Matemática

Caro estudante,

Este teste tem por objectivo, verificar o nível de raciocínio, conhecimento, compreensão e criatividade adquiridos nas sessões acompanhadas na determinação de termos gerais de sucessões.

Nome:

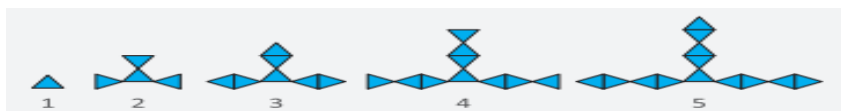
Data: 13 de Junho de 2023

- 1- Observa a seguinte sequência em que estão representadas as quatro primeiras figuras formadas com fósforos:



Mantendo a regularidade na construção das figuras pede-se:

- d) A representação da quinta figura.
 - e) Quantos fósforos tem a sexta figura?
 - f) Quantos fósforos tem a n-ésima figura?
- 2- As figuras seguintes representam os quatro primeiros termos de uma sequência.



- d) Defina um padrão no surgimento de mais figuras
- e) Esboce a sexta figura
- f) Determine a sucessão por recorrência quanto ao número de triângulos.

- 3- Determine o termo geral de sucessões, sem recorrer a fórmulas de PA ou PG.

e) $-\frac{1}{2}; -3; -\frac{15}{2}; -14; -\frac{45}{2}; \dots$

f) $-9; -6; -1; 6; 15; 26; \dots$

g) $-1; 2; 7; 14; 23; 34; 5; 9; 13; 17; \dots$

h) $1; 4; 7; 10; 13; 16; 19; \dots$

Guião de Entrevista a Professores de Matemática

TEMA:

PROPOSTA DE ESTRATÉGIAS PARA A OBTENÇÃO DO N-ÉSIMO TERMO DE SUCESSÕES E A SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA COM RECURSO A GEOGEBRA NA 11ª CLASSE. UM ESTUDO DE CASO NA ESCOLA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES.

OBJECTIVO DA ENTREVISTA:

- ✓ Analisar as perspectivas dos professores na obtenção do termo geral de sucessões sem recurso a fórmulas e a sua representação gráfica com recurso ao geogebra;

Entrevista semi-estruturada.

Blocos	Questões Orientadoras	Objectivo
A - Legitimação da entrevista; - Questões de ética	- Breve explicação dos objectivos da entrevista para a investigação; - Explicação sobre o anonimato e a confidencialidade do conteúdo da entrevista.	- Explicar os objectivos da entrevista; - Assegurar o anonimato e a confidencialidade da entrevista.
B - Percurso da vida profissional	- O Início da vida profissional; - Formação académica; - O tempo de leccionação da disciplina de Matemática no segundo ciclo.	- Perceber a experiência acumulada na leccionação.
C - O Ensino de Sucessões no segundo Ciclo;	- os teus alunos conseguem encontrar termo geral de sucessões sem recurso a fórmulas do termo geral? - Alguma vez nas reuniões de coordenação pedagógica tratou-se de questões de termos gerais de sucessões sem recurso a fórmulas de PA e/ou PG? - Já tratou do assunto com os teus alunos? E a representação gráfica de sucessões tem tratado? Como? - Os alunos apresentaram grandes dificuldades na determinação do termo geral de sucessões que não são PA nem PG. O que fazer, em termos de intervenção didáctica, para minimizar estas dificuldades?	- Caracterizar as dificuldades dos alunos identificadas pelos professores; - Caracterizar a formação sobre o tema; - Perceber o ponto de vista de professores sobre a representação gráfica de sucessões - Perceber o que pensam os professores para que se ultrapasse as dificuldades apresentadas.
D Questões Finais		- Questionar ao professor no sentido de saber se pretende acrescentar algo.

<p>E</p> <p>Agradecimento e validação da entrevista</p>	<p>Muito obrigado pela vossa participação e desejo lhes sucesso na vida profissional e que Deus os abençoe</p>	<p>Agradecer o professor pelo tempo cedido e pelas informações fornecidas.</p>
<p>Observação:</p> <p>Algumas questões a efectuar, poderá depender do entrevistado, visto que cada percurso de vida é singular e muito particular</p>		

ANEXOS

Anexo I: Programa de Matemática da 11.^a Classe da Escola de Formação de Professores do I Ciclo

INTRODUÇÃO GERAL DA DISCIPLINA

A disciplina de matemática como ciência do desenvolvimento do pensamento, contribui de forma activa para alcançar os objectivos da formação das jovens gerações.

Numa perspectiva global do contexto actual angolano, o professor do primeiro ciclo deve possuir conhecimentos técnicos científicos e metodológicos de forma a desenvolver o pensamento racional, indutivo e dedutivo.

A eficácia na realização de cálculos e perseverança nos procedimentos a seguir para a sua execução, bem como o poder de racionalizar são capacidades que o professor deve possuir para promover nos alunos a necessidade de desenvolver uma sociedade progressiva.

O programa da disciplina consta de conteúdos temáticos a nível de uma preparação efectiva e sólida a fim de proporcionar aos formandos conhecimentos que lhes permita transmitir adequadamente aos alunos.

Assim constam deste programa os conteúdos em unidades e subunidades seguidos dos objectivos gerais e específicos, permitindo ao professor uma visão clara das suas aulas.

As sugestões metodológicas, surgem como auxílio de algumas situações ou dúvidas que possam ocorrer durante a planificação.

A bibliografia presente estabelecerá um relacionamento de conhecimentos sobre um determinado tema, tratados por diversos autores.

OBJECTIVOS GERAIS DA DISCIPLINA

Objectivos gerais da Matemática na formação de professores do 1º ciclo

O ensino da matemática deverá desenvolver nos alunos a capacidade de:

- Traduzir a linguagem comum em linguagem algébrica, para comunicar ideias.
- Resolver problemas matemáticos e da vida prática.
- Desenvolver e aprofundar conhecimentos científicos.
- Resolver problemas, que desenvolvam as capacidades de análise e síntese.

- Desenvolver hábitos de pesquisa, organização e validação de resultados.
- Reconhecer a matemática como actividade humana permanente.
- Promover a aquisição de matérias que permitam dominar numa forma abrangente o conhecimento da matemática a ensinar.

OBJECTIVOS ESPECÍFICOS DA 11ª CLASSE

- Definir o conceito de número complexo
- Representar o número complexo em forma binómica
- Representar geometricamente um número complexo
- Calcular com os números complexos
- Representar trigonometricamente um número complexo
- Definir o conceito função no conjunto dos números reais
- Calcular a partir do conceito de função numérica
- Identificar o símbolo de somatória
- Identificar formulas de arranjos, permutações e combinações
- Calcular com os arranjos, permutações e combinações
- Identificar as sucessões numéricas
- Calcular progressões aritméticas e geométricas
- Identificar as propriedades das funções
- Representar graficamente funções
- Definir o conceito de função num ponto
- Definir o conceito de função contínua

ESQUEMA PROGRAMÁTICO

(11ª CLASSE)

UNIDADE 1: NÚMEROS COMPLEXOS

- 1.1- Números Complexos
 - 1.1.1- Representação Binómica (Introdução aos números Complexos)
 - 1.1.2- Números Complexos Conjugados. Módulo de um número Complexo
 - 1.1.3- Forma trigonométrica de um número Complexo
 - 1.1.4- Potência e raízes dos números Complexos
 - 1.1.5- Polinómios e equações

UNIDADE 2: FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEIS REAL

- 2.1- Conceito de função (aplicação, correspondência, transformação)
- 2.2- Domínio de existência de uma expressão
- 2.3- Conceito de função real de variáveis real
- 2.4- Operações com funções reais de variáveis real
- 2.5- Funções “domínio, contradomínio, zeros, inversa e o gráfico de”:
 - 2.5.1- Funções Potenciais
 - 2.5.2- Funções Polinomiais
 - 2.5.3- Funções Racionais e Irracionais
 - 2.5.4- Funções Exponenciais e Logarítmicas
 - 2.5.5- Funções Trigonométricas

UNIDADE 3: CÁLCULO COMBINATÓRIO

- 3.1- Somatória. Exemplos e Aplicações
- 3.2- Factorial de um número, arranjos e combinações
- 3.3- Binómio de Newton
 - 3.3.1- Coeficientes binomiais, triângulo de Pascal. Fórmula do termo geral

UNIDADE 4: SUCESSÕES. APLICAÇÕES DE \mathbb{N} EM \mathbb{R}

- 4.1- Definição de uma sucessão. Tema de uma sucessão
- 4.2- Sucessões Numéricas como caso particular de Função
 - 4.2.1- Sucessão Recorrente
 - 4.2.2- Sucessões Monótonas e finitas
- 4.3- Progressão Aritmética
- 4.4- Progressão Geométrica

UNIDADE 5: LIMITE DE SUCESSÕES.

- 5.1- Definição de limite de uma sucessão
 - 5.1.1- Unicidade de limite de uma sucessão. Teoremas sobre limites
- 5.2- Sucessões convergentes e sucessões divergentes
- 5.3- Sucessões limitadas
- 5.4- Operações com limite

- 5.5- Conceito de limite de uma função num ponto. Interpretação geométrica
 - 5.5.1- Unicidade de limite de uma função num ponto
 - 5.5.2- Operações com limites
 - 5.5.3- Limites Notáveis
- 5.6- Funções contínuas
- 5.7- Limites infinitos

SUGESTÕES METODOLOGICAS

11ª CLASSE

Unidade Números complexos

O essencial nesta unidade é que os alunos compreendam o conceito de número complexo, como necessidade de um novo tipo de número.

Representar geometricamente os números complexos e calcular com estes números, dentro das operações já conhecidas.

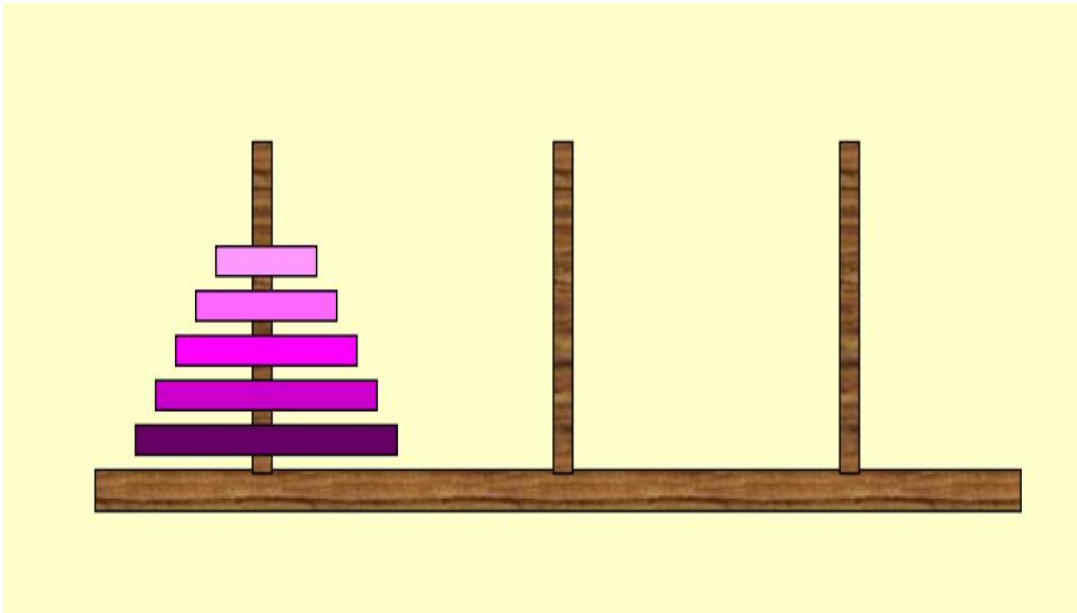
Funções de variáveis Reais. Definir o conceito de função, de variáveis reais e determinar os seus gráficos. O estudo das funções inclui também o estudo das propriedades como: Domínio, imagem, zeros, monotonia, inversa e traçado do gráfico.

Sucessões elementares. Fundamental neste capítulo é conhecer o desenvolvimento do binómio de Newton, quer pela sua forma geral como dos casos particulares.

Nas sucessões deve-se diferenciar os tipos e desenvolver a sua aplicação a problemas da vida prática. Desenvolvem-se habilidades de cálculo com números Racionais e Reais.

Introduz-se o conceito de limite de uma função num ponto e desenvolver procedimentos para o cálculo de limites e de funções elementares. Demonstram-se e fundamentam-se os limites de funções e de sucessões.

Anexo II: A Torre de Hanói com 5 Discos



Objectivo do jogo:

- ✓ Mudar a pilha de discos para uma outra haste mantendo a mesma ordem.

Regras do Jogo:

Para concretizar o objectivo há duas principais regras e obrigatórias:

- ✓ Só mudar um disco de cada vez (chama-se passagem à mudança de um disco de um poste para outro);
- ✓ Não se pode colocar um disco de diâmetro maior por cima de um de diâmetro menor.

Observação: Para uma quantidade de n discos, teria no mínimo $2^n - 1$ passagens permitidas para a mudança total de pilhas para uma outra haste.